(فهرست علم حساب المثلثات)

صحيفة



بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله وسع محيط علمه الاشياء * وتاهت فى دائرة وحدانيته الاصفياء *
تنزه عن التثنية والتثليث * كما نطق بذلك الكتاب والحديث * فسبحانه
لامانع لما اعطاه * ولا قائم لمن ابعده ونحاه * فالسعيد المماس لماقيه
رضاه * يظله بظل عرشه يوم قضاه * والشقى القاطع لرحمه المنتهك لحرمه *
يبعده ويصب عليه بلايا نقمه * وصلاة وسلاما على ممزق جيوب الشرك
بقواطع البراهين * وهادم قواعد الكفر باعمدة اليقين * وقاطع إشكال
الضلاله * ومزيل أشكال الجهاله * محمد متمم المرسلين * ومكمل
بعثة النبيين * صلى الله وسلم عليه * وآله وكل منتسب اليه

وبعد فان علم حساب المثلثات * له دخل عظيم فى الرياضيات * فهو من
انفع العلوم لعلم الملاحه * وعلم الفلك والمزاول والمساحه * وغيرها من

الفروع

الفروع الرياضية والحربيه * كفن الاستحكامات والعسكريه * وهو فرع
من الهندسه * كان للمتقدمين به معرفه * ومع اشتغال المتاخرين به
وكثرة منافعه * لم يعلم منشؤه ولا حقيقة واضعه * وكان المصريون
لا يجهلونه بالكليه * بل يعرفون قواعده الاوليه * الا ان مباديه العظيمة
الشان * اخذت من بلاد اليونان * ونقل بعض من برع فى العلوم
الرياضيه * طيون احد مشاهير المدرسين بثغر الاسكندريه * ان
هيبارك ألف رسالة جليلة المقدار * فيما يتعلق بقسى الدائرة من الاوتار *
تحتوى على اثنى عشر جزأ خفيفه * والظاهر صحة هذه المقالة اللطيفه *
غير ان اقدم الرسائل الاوليه * رسالة الشهير تيودوز الكرويه * وقد بلغ
هذا العلم درجة من الكمال * بواسطة ما ابداه الرياضى الانكليزى تيبير
من الاعمال * ثم انتهى الى هذا القدر المرغوب * بما ابداه الرياضى
النمساوى اولير من نظرية الجيوب * هذا ولما رأى رب الصداره * ومن
تشرفت به رتب الوزاره * ان تقدم الملل اغا هو باعتنائهم بالعلوم *
والنظر فى منطوقها والمفهوم * وان تربية العساكر المصريه * عليها
مدار القوة الاسلاميه * برزامره السعيد * ورأيه الصائب السديد *
الى صاحب المدركة الفياضه * والبراعة التامة فى الرياضه * من تلاقى
رتب المجد وتدارك * سعادة على بيك مبارك * باستخراج منتخبات
مفيده * من المختصرات الرياضية العديده * التى عملت بمدرسة ادارته *
ولحظتها عين فكرته * لينتفع بها فى العسكريه * لان عليها مدار الاعمال
الحربيه * فاحال استخراج كل منتخب من المنتخبات * على من له فى علم
ذلك المنتخب ثبات * ومن جملتها منتخب فى علم المثلثات * احاله على الماهر
اللبيب * واللوذعى الاريب * من حاز من العلوم محاسن الفرائد *
بيكباشى احمد افندى فائد * فانتخبه لطيف المبنى * من مختصره فى هذا
المعنى * ترجمة الشاب الناجح * السيد افندى صالح * وكان
المباشر لانتخابه * وضبط اعمال حسابه * صاحب الروية والسن *

عطاء افندي حسن * زاد عليه زيادات نافعه * اصبحت اثماره بها يانعه * ولما كانت اعمال هذا العلم الحسابيه * متوقفة على معرفة القواعد اللوغاريتميه * وكيفية تركيب الجداول المحسوبة المحرره * ضم الى ذلك المنتخب تلك القواعد النافعة المختصره * ووضع تركيب الجداول وكيفية استعمالها * بطريقة سهلة لم ينسج على منوالها * ليكون تام الفائدة عظيم المنافع * باضافة ما يلزم له من التوابع * قال مصحح مبانيه * ومحرر معانيه * ذو العجز الحقيق * ابراهيم الدسوقي * كان ذلك خدمة لصاحب السعادة * والفطنة الذكية الوقادة * من هو الى سعة الرحمة يومي * افندينا عباس باشا حلمي * اطال الله عمره * وانفذ في سائر الاقطار امره * واصلح به البلاد والعباد * وذلل به معاطس اهل العناد * وارغم به انوف الفجره * وحفظه في بنيه البرره * وخلد فيهم الوزاره * واعلى بهم من الدين مناره * ولما تهيأ للتمام * ولبس وشاح الختام * وسمته بالروضة السندسيه * في الحسابات المثلثيه



(فى علم حساب المثلثات المستقيمة الاضلاع)

(مقدمة)

(١) الغرض من هذا العلم حل المثلث

وحل المثلث هو ايجاد مقادير الاضلاع والزوايا المجهولة منه وذلك لا يتأتى الا بعاليم كافية من اضلاعه وزواياه وحيث ان المثلث يحتوى على ستة اشياء وهى ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا فثلاثة منها تكفى لحله فى الغالب بشرط ان يكون فيها بالاقل ضلع واحد لانه اذا علمت ثلاث زوايا مجموعها يساوى قائمتين امكن تحصيل مثلثات متشابهة غير معينة العدد وبهذا يصير للمسألة حلول غير معينة

واستعمال الطرق الحسابية فى حل المثلثات يستدعى تقدير الاضلاع بوحدة الاطوال قبل ذلك حتى تكون مبينة بالاعداد ولتقدير الزوايا او قسيها بالاعداد قسم محيط الدائرة الى اجزاء متساوية تسمى درجا فعدد الدرج التى تحتوى عليها الزاوية او القوس هو مقدار الزاوية او القوس ولتقسيم المحيط طريقتان طريقة قديمة وهى التى نسلكها فى اعمالنا لكثرة استعمال جداولها اللوغارتمية وطريقة جديدة فأما الطريقة الاولى فهى تقسيمه الى ٣٦٠ جزأ من الاجزاء المتساوية تسمى درجا والدرجة تنقسم الى ٦٠ دقيقة والدقيقة الى ٦٠ ثانية والثانية الى ٦٠ ثالثة وهكذا وبمقتضى هذه الطريقة يكون مقدار الزاوية القائمة ٩٠ درجة وهى ربع المحيط ويرمز للدرجة بالرمز ٠ وللدقيقة بالرمز ـ وللثانية بالرمز ، وكيفية كتابة الزاوية التى قدرها ٢٣ درجة و ١٧ دقيقة و ٤٨ ثانية مثلا على الطريقة القديمة هكذا ٤٨ ١٧ ٢٣

واما الطريقة الجديدة الاعشارية فهى تقسيمه الى ٤٠٠ جزء من الاجزاء المتساوية تسمى درجا والدرجة تنقسم الى ١٠٠ من الاجزاء المتساوية تسمى دقائق والدقيقة الى ١٠٠ من الاجزاء المتساوية تسمى ثوانى وهلم جرّا

وكيفية



وكيفية كتابة الزاوية التي قدرها ٣٥ درجة ماثينية و ٢٤ دقيقة و ٤٦ ثانية مثلا على الطريقة الجديدة هكذا ٠٫٣٥٢٤٤٦ باعتبار ان ربع المحيط يساوي واحدا

(في تعريف الخطوط المساحية)

(٢) لما كانت الاضلاع في كل مثلث غير مناسبة للزوايا وغير مجانسة لها وبهذا السبب كان يتعذر ايجاد ما بينهما من الارتباطات وجب حينئذ استعواض الزوايا وقسيها بالخطوط المعروفة بالخطوط المساحية وهي خطوط مرتبطة بالزوايا او قسيها بمعرفتها نعرف القوس والعكس بالعكس وبذا يسهل ايجاد ما بينها من الارتباطات الموصلة الى حل المثلث

ولنعرف الخطوط المساحية للزاوية ا و م أو لقوسها ا م الذي يفرض نصف قطره مساويا للواحد لاختصار العمليات الحسابية فنقول

جيب القوس او الزاوية هو العمود النازل من احدى نهايتي القوس على القطر المار بالنهاية الاخرى من القوس المذكور

وظل القوس او ظل الزاوية هو جزء المماس المخرج من احدى نهايتي القوس المحصور بين نقطة التماس وامتداد نصف القطر المار بالنهاية الاخرى من القوس

فالعمود م ن (من الشكل ١) هو جيب الزاوية ا و م او جيب القوس ا م والمستقيم ا ك هو ظل الزاوية ا و م او ظل القوس ا م

وقاطع الزاوية او القوس هو جزء من المستقيم غير المحدود المخرج من المركز والمار باحدى نهايتي القوس محصور بين المركز والمماس المار بالنهاية الاخرى من القوس

فالمستقيم و ك هو قاطع الزاوية ا و م او القوس ا م

ومتمم القوس جزء قوسي يلزم ضمه للقوس لتكوين ٩٠° وكذا متمم الزاوية فتمم قوس ٣٥° مثلا هو ٥٥°

ومتى كان القوس اكبر من ٩٠° كان متممه سالبا فمتمم القوس ١٣٠° مثلا يكون -٤٠° والزاويتان الحادتان من المثلث القائم الزاوية متممتان لبعضهما

ويطلق اسم جيب المتمم وظل المتمم وقاطع المتمم لقوس على جيب متمم تلك القوس وظلها وقاطعها وبناء عليه اذا اقيم نصف القطر وب عمودا على القطر ا ا' و م ط و ب ل عمودين على وب كان م ط هو جيب القوس م ب و ب ل ظلها و و ل قاطعها وحيث ان القوس م ب هو متمم القوس ا م يكون م ط جيب متمم هذه الاخيرة و ب ل ظل متممها و و ل قاطع متممها ويجعل ى رمزا للقوس ا م المذكورة تكون خطوطها المساحية مبينة على سبيل الاختصار بهذه الصورة وهى

م ن = جاى و ا ك = ظاى و و ك = قاى

و م ط = و ن = جتاى و ب ل = ظتاى و و ل = قتاى

وحيث ان م ط يساوى و ن يكون جيب المتمم للقوس ا م هو بعد موقع الجيب عن المركز

(فى مقادير الخطوط المساحية)

(ومالها من الاشارات فى جميع مقادير القسى)

(٣) قد اعتبر القوس ا م (كما فى الشكل ١) اقل من ٩٠° فان زاد عنها اى عن ربع المحيط انعكس وضع بعض الخطوط المساحية فاذا كان القوس ا ب م' اكبر من ٩٠° واقل من ١٨٠° (كما فى الشكل ١) كان جيب متممها و ن' مساويا فى المقدار المطلق لجيب متمم القوس ا م الا انه مخالف له فى الوضع

ولجعل القوانين اى الارتباطات الجبرية الواقعة بين الخطوط المساحية موافقة

لسائر

لسائر مقادير القسى يلزم استعمال قاعدة العلامات وذلك بان تجعل علامة + خاصة بالخطوط التى تقع فى جهة معينة وعلامة — بالخطوط المضادة لتلك الخطوط فى الوضع وبهذا تكون قوانين الخطوط المساحية عامة فى سائر القسى وان كانت موضوعة فى الاصل لقوس مخصوص

ولنعتبر من الآن فصاعدا نقطة ما من المحيط كالنقطة ا من (شكل ١) مبدأ للقسى الموجبة او السالبة لكن نأخذ الموجبة فى الاتجاه ا ــ أ والسالبة فى الاتجاه ا ــ أ

واما الخطوط المساحية فانها تعطى علامة + فى الوضع المقابل لقوس اقل من ٩٠° وعلامة — فى الوضع المضاد لهذا الوضع

وعليه فعلامة + تعطى للجيوب والظلال الموضوعة فوق القطر اأ وعلامة — للجيوب والظلال الكائنة تحته

فاما جيوب المتمم وظلال المتمم فيعطى لها علامة + او علامة — بحسب وضعها على يمين القطر ــ ت او شماله واما القاطع وقاطع المتمم فيعطى لهما علامة + او علامة — بحسب وضعهما على المستقيم المخرج من المركز الى نهاية القوس او على امتداد ذلك المستقيم من هذا المركز الى الجهة المضادة

(٤) * وباعتبار النقطة ا مبدأ للقسى كما فى (شكل ٢) يشاهد بداهة انه متى انطبق نصف القطر وم على نصف القطر وا انعدم القوس ام وكذا جيبها وظلها اما قاطعها فانه يكون مساويا لنصف القطر وكذا متمم الجيب واما ظل المتمم وقاطع المتمم فانهما يكونان لانهائيين وبفرض نصف القطر = ١ يحدث

جا ٠° = ٠ و ظا ٠° = ٠ و قا ٠° = ١

و جتا ٠° = ١ و ظتا ٠° = ∞ و قتا ٠° = ∞

والظاهر انه اذا ارتفع نصف القطر وم من الوضع وا الى الوضع وب شوهد بالسهولة ان كلا من الجيب والظل والقاطع يأخذ في الازدياد وان كلا من جيب المتمم وظل المتمم وقاطع المتمم ياخذ في النقص وعند وصول النقطة م الى النقطة ب وانطباقها عليها يكون الجيب مساويا لنصف القطر وب واما الظل والقاطع فانهما يكونان لانهائيين واما جيب المتمم وظل المتمم فانهما يؤلان الى العدم وفي هذه الحالة يكون قاطع المتمم مساويا ايضا لنصف القطر وب فحينئذ يكون

جا ٩٠° = ١ و ظا ٩٠° = ∞ و قا ٩٠° = ∞

و جتا ٩٠° = ٠ و ظتا ٩٠° = ٠ و قتا ٩٠° = ١

فاذا اخذ القوس في الزيادة من ٩٠° الى ١٨٠° فان الجيب م ق لا يزال موجبا وآخذ في النقص من نصف القطر وب الى الصفر فاما الظل ا ذ فانه يصير سالبا ومقداره المطلق ياخذ في النقص من ∞ الى ٠ وكذا القاطع فانه يكون سالبا ومقداره المطلق يتناقص من ∞ الى ١ واما جيب المتمم فانه يكون سالبا ايضا ومتغيرا من ٠ الى −١ وكذا ظل المتمم ب ذ فانه يكون سالبا ومتغيرا من ٠ الى ∞ واما قاطع المتمم فانه لا يزال موجبا ومتغيرا من ١ الى ∞ فاذن يحصل

جا ١٨٠° = ٠ و ظا ١٨٠° = ٠ و قا ١٨٠° = −١

و جتا ١٨٠° = −١ و ظتا ١٨٠° = −∞ و قتا ١٨٠° = ∞

واذا

واذا اخذت القوس المذكورة فى الزيادة من ١٨٠° الى ٢٧٠° فان الجيب م ق يصير سالبا ومقداره المطلق ياخذ فى الزيادة من ٠ الى ١ فاما الظل ا ت فيكون فى هذه الحالة موجبا وآخذا فى الزيادة من ٠ الى ∞ واما القاطع فلا يزال سالبا ومقداره المطلق يزداد من ١ الى ∞ وكذا جيب المتمم و ق فانه لا يزال سالبا ومقداره المطلق يتناقص من ١ الى ٠ واما ظل المتمم فيكون موجبا وآخذا فى التناقص من ∞ الى ٠ واما قاطع المتمم ول فانه يكون سالبا وآخذا فى التناقص من ∞ الى ١ وحينئذ يكون

جا ٢٧٠° = — ١ و ظا ٢٧٠° = — ∞ و قا ٢٧٠° = — ∞

و جتا ٢٧٠° = ٠ و ظتا ٢٧٠° = ٠ و قتا ٢٧٠° = — ١

واذا اخذ القوس فى الزيادة ايضا من ٢٧٠° الى ٣٦٠° فان الجيب يكون سالبا ومتغيرا من — ١ الى ٠ وكذا الظل فانه يكون سالبا ومتغيرا من ∞ الى ٠ واما القاطع فيصير موجبا وآخذا فى التناقص من ∞ الى ١ وكذا جيب المتمم فانه يكون موجبا وآخذا فى الزيادة من ٠ الى ١ واما ظل المتمم فيكون سالبا ومتغيرا من ٠ الى ∞ وكذا قاطع المتمم فانه يكون سالبا ومقداره المطلق يأخذ فى الزيادة من ١ الى ∞ فحينئذ يكون

جا ٣٦٠° = ٠ و ظا ٣٦٠° = ٠ و قا ٣٦٠° = ١

و جتا ٣٦٠° = ١ و ظتا ٣٦٠° = ∞ و قتا ٣٦٠° = ∞

فاذا فرض ان القوس ازدادت عن المحيط فان خطوطه المساحية تكون فى المقادير والعلامات كالخطوط المساحية للقوس الذى يزيد عن المحيط ومن

البديهى انه اذا اضيف الى قوس عدد صحيح من المحيطات فان خطوطه المساحية لا تتغير ومما يشاهد بالسهولة ايضا انه اذا اضيف الى قوس عدد فردى من انصاف المحيطات فان خطوطها المساحية لا تتغير مقاديرها وانما تتغير علاماتها ماعدا الظل وظل المتمم فان علامتيهما لا تتغيران

واما القسى السالبة (كما فى الشكل ٢) اى الماخوذة فى الجهة أ ـ أَ فيكون لها بقطع النظر عن العلامات خطوط مساحية مساوية لخطوط القسى الموجبة المتحدة معها فى الدرج فاذا اخذ القوس ا م = ا مَ مثلا فان مقادير خطوطهما المساحية تكون واحدة الا انه يمكن اختلاف بعضها عن بعض فى العلامات فيشاهد ان جيبيهما وظليهما وظل متممهما وقاطعى متممهما مختلفة فى العلامات وان جيبى متممهما وقاطعيهما متحدة فى العلامات بحيث اذا جعل ــ ى رمزا للقوس امَ حدثت هذه الارتباطات وهى

جا (ــ ى) =ــ جا ى و جتا (ــ ى) = جتا ى

و ظا (ــ ى) =ــ ظا ى و قا (ــ ى) = قا ى

و ظتا (ــ ى) =ــ ظتا ى و قتا (ــ ى) =ــ قتا ى

ويطلق اسم مكمل القوس على المقدار الذى يلزم ضمه اليه لتحصيل ١٨٠°

فحينئذ يكون مكمل القوس ى مثلا (١٨٠° ــ ى) ويكفى لتعيين مكمل القوس امَ ان يرسم من النقطة مَ مستقيم مَ مٍ موازٍ للقطر اأَ بحيث يتقاطع مع المحيط فى النقطة مٍ فتكون القوس امٍ المساوية للقوس أَمَ هى المكمل للقوس امَ ويعلم بالسهولة ان الخطوط المساحية للقوسين المتكاملتين امٍ و امَ تكون متساوية

فى

فى المقادير ومختلفة فى العلامات ماعدا الجيب وقاطع المتمم فانهما متحدان مقدارا وعلامة وبجعل ى رمزا للقوس ام كما فى (الشكل ٢) يحدث

جا (١٨٠° ــ ى) = جا ى و ظا (١٨٠° ــ ى) = ــ ظا ى

و قا (١٨٠° ــ ى) = ــ قا ى و جتا (١٨٠° ــ ى) = ــ جتا ى

و ظتا (١٨٠° ــ ى) = ــ ظتا ى و قتا (١٨٠° ــ ى) = قتا ى

(٥) ينتج مما تقدم ان الجيب وجيب المتمم يقبلان التغير من + ١ الى ــ ١ وان علامتيهما تتغيران عند مرورهما بالصفر وان الظل وظل المتمم يقبلان التغير من ∞ الى ــ ∞ وان علامتيهما تتغيران عند مرورهما بالصفر وان القاطع وقاطع المتمم يقبلان التغير من + ١ الى + ∞ ومن ــ ١ الى ــ ∞ وان علامتيهما تتغيران عند مرورهما بما لا نهاية

وبناء على ذلك اذا جعل نصف القطر وحدة فكل عدد موجب او سالب دون الواحد يمكن اعتباره جيبا لقوس او جيب متمم لها وكل عدد موجب او سالب يعتبر ظلا لقوس او ظل متمم لها

وكل عدد موجب او سالب مقداره المطلق اكبر من الواحد يعتبر قاطعا لقوس او قاطع متمم لها

(فى الارتباطات الواقعة بين الخطوط المساحية لقوس)

(٦) لتعيين الارتباطات الواقعة بين الخطوط المساحية للقوس ام كما فى (الشكل ١) يرمز لتلك القوس بالرمز ى والى نصف القطر بالرمز نق = ١ فيحدث

م ه = جا ى و ا ه = ظا ى و وه = قا ى

و م ك = ون = جتا ى و ــ ل = ظتا ى و ول = قتا ى

ويؤخذ من المثلثين وم ن و وها القائمى الزاوية المتشابهين ان

اه : م ن :: وا : و ن او

ظاد : جاد :: ١ : جتاد ومنها يحدث

ظاد = جاد/جتاد (١)

ومن المثلثين وم ك و وسـ ل يكون

سـ ل : م ك :: و سـ : و ك او ظتاد : جتاد :: ١ : جاد

ومنها يحدث

ظتاد = جتاد/جاد (٢)

و وه : وم :: وا : و ن او قاد : ١ :: ١ : جتاد

ومنها يحدث

قاد = ١/جتاد (٣)

و ول : وم :: و سـ : و ك او قتاد : ١ :: ١ : جاد

ومنها يحدث

قتاد = ١/جاد (٤)

ومن المثلث وم ن القائم الزاوية يحدث

م ن^٢ + و ن^٢ = وم^٢ او

جا^٢د + جتا^٢د = ١ (٥)

(٧) يمكن بالسهولة تولد الارتباطين (٢) و (٤) من الارتباطين (١) و (٣) لانه اذا وضع فى هذين الاخيرين بدل القوس د القوس (٩٠ ــ د) المتمم له الا الى

(طا)

ظا (٩٠ ــ د) = جا (٩٠ ــ د) / جتا (٩٠ ــ د) او ظتا د = جتا د / جا د و

قا (٩٠ ــ د) = ١ / جتا (٩٠ ــ د) او قتا د = ١ / جا د

(٨) وبواسطة الارتباطات

ظا د = جا د / جتا د (١) و ظتا د = جتا د / جا د (٢) و قا د = ١ / جتا د (٣)

و قتا د = ١ / جا د (٤) و جا٢ د + جتا٢ د = ١ (٥)

يتيسر ايجاد مقادير خمسة من الخطوط الستة المنسوبة للقوس د متى علم واحد منها فانه اذا علم جا د مثلا سهل تعين جتا د و قا د و قتا د الخ لانه يؤخذ من الارتباطات المذكورة ان

جتا د = ± √(١ ــ جا٢ د) و ظا د = ± جا د / √(١ ــ جا٢ د) و قا د = ± ١ / √(١ ــ جا٢ د)

و ظتا د = ± √(١ ــ جا٢ د) / جا د و قتا د = ١ / جا د

فيؤخذ من هذه القوانين ان لكل من الخطوط المساحية ما عدا قاطع المتمم مقدارين متساويين ومختلفين فى العلامة لانه يشاهد كما فى (الشكل ٢) ان الجيب وط المعلوم يقابله جيبا المتمم ون و ون والظلان اه و اهَ وظلا المتمم ــ ل و ــ لَ والقاطعان وه و وهَ التى كل اثنين منها متساويان ومختلفان فى العلامة واما قاطعا المتمم ول و ولَ فانهما متساويان ومتحدان فى العلامة

واذا علم ظا د تحصل بالسهولة

جاء = $\pm$ $\sqrt{\frac{ظاء^2}{1+ظاء^2}}$ و جتاء = $\pm$ $\sqrt{\frac{1}{1+ظاء^2}}$ و ظتاء = $\frac{1}{ظاء}$

و قاء = $\pm$ $\sqrt{1+ظاء^2}$ و قتاء = $\pm$ $\sqrt{1+\frac{1}{ظاء^2}}$

ويؤخذ مما ذكر ان اى خط مساحى اصلى معلوم العلامة والمقدار لا يكفى لتعيين قوس مخصوص بل يلزم زيادة على ذلك معرفة علامة احد خطوطه الاخر حتى يتم تعيينه

في الارتباطات التي يؤخذ منها الجيب وجيب المتمم لمجموع قوسين وفاضلهما بواسطة جيبي هذين القوسين وجيبي متمميهما

(٩) ليكن اب = ء و به = ح رمزين للقوسين المعلومين كما في (الشكل ٣) فيكون

اه=ء+ح و ال=ء-ح و ون=جاء و هف=جاح و ون=جتاء و وف=جتاح و هح=جا(ء+ح) و وح=جتا(ء+ح) و لب=جا(ء-ح) و وب=جتا(ء-ح)

فاذا رسم من النقطة ف المستقيم فك عمودا على هح و فط عمودا على وا ومن النقطة ل المستقيم لم عمودا على فط حدث

جا(ء+ح) = هح = حك + كه = فط + كه
و جا(ء-ح) = لب = فط - م ف = فط - كه
و جتا(ء+ح) = وح = وط - طح = وط - فك
و جتا(ء-ح) = وب = وط + بط = وط + فك

ويؤخذ

ويؤخذ من المثلثين وﮦط و وبن المتشابهين ان

ﮦط : بن :: وﮦ : وب أو ﮦط : جاى :: جتاه : ١

ومنها يؤخذ ﮦط = جاى جتاه وان وط : ون :: وﮦ : وب

أو وط : جتاى :: جتاه : ١ ومنها يؤخذ وط = جتاى جتاه

ومن المثلثين وبن و ﮦكه المتشابهين لتعامد اضلاعهما على

بعضها بالتناظر يؤخذ أن هك : ون :: هﮦ : وب أو

هك : جتاى :: جاه : ١ ومنها يؤخذ هك = جتاى جاه

وان ﮦك : بن :: هﮦ : وب أو ﮦك : جاى :: جاه : ١

ومنها يؤخذ ﮦك = جاى جاه وبابدال وط و طﮦ و هك

و ﮦك بمقاديرها يحدث

جا (ى + ه) = جاى جتاه + جتاى جاه (٦)

و جا (ى − ه) = جاى جتاه − جتاى جاه (٧)

و جتا (ى + ه) = جتاى جتاه − جاى جاه (٨)

و جتا (ى − ه) = جتاى جتاه + جاه جاى (٩)

(١٠) اذا جعل ى = ه فى الارتباطين (٦) و (٨) حدث

جا ٢ ى = ٢ جاى جتاى (١٠)

جتا ٢ ى = جتا^{٢}ى − جا^{٢}ى (١١)

(١١) اذا ابدل فى الارتباطين (١٠) و (١١) القوس ى بالقوس

$\frac{١}{٢}$ ى حدث ،

جاى = ٢ جا $\frac{١}{٢}$ ى جتا $\frac{١}{٢}$ ى و جتاى = جتا^{٢} $\frac{١}{٢}$ ى − جا^{٢} $\frac{١}{٢}$ ى

فاذا فرض ان جتاى معلوم استخرج بالسهولة جا $\frac{١}{٢}$ ى و جتا $\frac{١}{٢}$ ى

من المعادلتين

$$\text{جتا}^2 \tfrac{1}{2}\,\text{د} + \text{جا}^2 \tfrac{1}{2}\,\text{د} = 1$$

$$\text{و}\quad \text{جتا}^2 \tfrac{1}{2}\,\text{د} - \text{جا}^2 \tfrac{1}{2}\,\text{د} = \text{جتا}\,\text{د}$$

وبواسطة جمع اطرافهما ثم طرحهما يحدث

$$\text{جا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{د} = \pm\sqrt{\frac{1-\text{جتا}\,\text{د}}{2}} \qquad (12)$$

$$\text{و}\quad \text{جتا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{د} = \pm\sqrt{\frac{1+\text{جتا}\,\text{د}}{2}} \qquad (13)$$

في الارتباطات الكائنة بين ظل مجموع قوسين او ظل فاضلهما وبين ظلي هذين القوسين

(١٢) اذا علم ظا د و ظا ح تحصل بالسهولة ظا (د + ح) و ظا (د − ح) بان يقسم جا (د + ح) على جتا (د + ح) ثم جا (د − ح) على جتا (د − ح) فيحدث

$$\text{ظا}\,(\text{د}+\text{ح}) = \frac{\text{جا}\,(\text{د}+\text{ح})}{\text{جتا}\,(\text{د}+\text{ح})} = \frac{\text{جا د جتا ح} + \text{جتا د جا ح}}{\text{جتا د جتا ح} - \text{جا د جا ح}}$$

وبقسمة حدي الكسر على جتا د جتا ح يحدث

$$\text{ظا}\,(\text{د}+\text{ح}) = \frac{\frac{\text{جا د}}{\text{جتا د}} + \frac{\text{جا ح}}{\text{جتا ح}}}{1 - \frac{\text{جا د}}{\text{جتا د}} \times \frac{\text{جا ح}}{\text{جتا ح}}} \quad \text{اى}$$

$$\text{ظا}\,(\text{د}+\text{ح}) = \frac{\text{ظا د} + \text{ظا ح}}{1 - \text{ظا د ظا ح}} \qquad (14)$$

ويتحصل ايضا

$$\text{ظا}\,(\text{د}-\text{ح}) = \frac{\text{ظا د} - \text{ظا ح}}{1 + \text{ظا د ظا ح}} \qquad (15)$$

(١٣) واذا جعل د = ح في الارتباط (١٤) حدث

$$\text{ظا}\,2\,\text{د} = \frac{2\,\text{ظا د}}{1-\text{ظا}^2\,\text{د}} \qquad (16)$$

(١٤) واذا علم ظا د وكان المطلوب ظا ½ د يوضع ½ د بدل د في الارتباط (١٦) فيحدث

$$\text{ظا د} = \frac{2\,\text{ظا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{د}}{1-\text{ظا}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{د}}$$

وبحذف المقام تحدث معادلة ذات درجة ثانية للمجهول ظا ½ د هي

$$\text{ظا}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{د} + \frac{2}{\text{ظا د}} \times \text{ظا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{د} - 1 = 0$$

ومن

ومن هنا يحصل

$$\text{ظا}\tfrac{1}{2}\text{د} = \frac{1}{\text{ظا د}}\left(-1 \pm \sqrt{1+\text{ظا}^{2}\text{د}}\right) \qquad (17)$$

وهذه المعادلة تدل على ان المجهول $\text{ظا}\tfrac{1}{2}\text{د}$ له مقداران حقيقيان حاصل ضربهما يساوى -1

في الارتباطات الكائنة بين مجموع او فاضل جيبين او جيبى متممين اقوسين وبين جيبيهما وجيبى متممهما

(١٥) اذا وضع فى الارتباطات الاربعة الاصلية (٦) و (٧) و (٨) و (٩) م و ن بدل د و ح وجمع الارتباطان (٦) و (٧) ثم طرح الثانى من الاول وكذلك الارتباطان (٩) و (٨) حدث

$$\text{جا}(\text{م}+\text{ن}) + \text{جا}(\text{م}-\text{ن}) = 2\,\text{جا م جتا ن}$$

$$\text{جا}(\text{م}+\text{ن}) - \text{جا}(\text{م}-\text{ن}) = 2\,\text{جا ن جتا م}$$

$$\text{جتا}(\text{م}+\text{ن}) + \text{جتا}(\text{م}-\text{ن}) = 2\,\text{جتا م جتا ن}$$

$$\text{جتا}(\text{م}-\text{ن}) - \text{جتا}(\text{م}+\text{ن}) = 2\,\text{جا م جا ن}$$

فاذا جعل فى هذه الارتباطات الاخيرة $\text{م}+\text{ن}=\text{د}$ و $\text{م}-\text{ن}=\text{ح}$ و $\text{م}=\tfrac{1}{2}(\text{د}+\text{ح})$ و $\text{ن}=\tfrac{1}{2}(\text{د}-\text{ح})$ تحصل

$$\text{جا د} + \text{جا ح} = 2\,\text{جا}\tfrac{1}{2}(\text{د}+\text{ح})\,\text{جتا}\tfrac{1}{2}(\text{د}-\text{ح}) \qquad (18)$$

$$\text{جا د} - \text{جا ح} = 2\,\text{جا}\tfrac{1}{2}(\text{د}-\text{ح})\,\text{جتا}\tfrac{1}{2}(\text{د}+\text{ح}) \qquad (19)$$

$$\text{جتا د} + \text{جتا ح} = 2\,\text{جتا}\tfrac{1}{2}(\text{د}+\text{ح})\,\text{جتا}\tfrac{1}{2}(\text{د}-\text{ح}) \qquad (20)$$

$$\text{جتا ح} - \text{جتا د} = 2\,\text{جا}\tfrac{1}{2}(\text{د}+\text{ح})\,\text{جا}\tfrac{1}{2}(\text{د}-\text{ح}) \qquad (21)$$

وهى ارتباطات تستعمل فى تحويل مجموع او فاضل جيبين او جيبى متممين الى حاصل ضرب اى الى كمية ذات حد واحد يسهل حسابها بواسطة اللوغارتمات

(١٦) اذا قسم الارتباط (١٨) على (١٩) و (١٨) على (٢٠) و (١٩) على (٢٠) حدث

$$\frac{\text{جا د} + \text{جا ح}}{\text{جا د} - \text{جا ح}} = \frac{٢\,\text{جا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}+\text{ح})\,\text{جتا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}-\text{ح})}{٢\,\text{جا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}-\text{ح})\,\text{جتا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}+\text{ح})} = \frac{\text{ظا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}+\text{ح})}{\text{ظا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}-\text{ح})} \quad (٢٢)$$

$$\frac{\text{جا د} + \text{جا ح}}{\text{جتا د} + \text{جتا ح}} = \frac{٢\,\text{جا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}+\text{ح})\,\text{جتا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}-\text{ح})}{٢\,\text{جتا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}+\text{ح})\,\text{جتا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}-\text{ح})} = \text{ظا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}+\text{ح}) \quad (٢٣)$$

$$\frac{\text{جا د} - \text{جا ح}}{\text{جتا د} + \text{جتا ح}} = \frac{٢\,\text{جا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}-\text{ح})\,\text{جتا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}+\text{ح})}{٢\,\text{جتا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}+\text{ح})\,\text{جتا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}-\text{ح})} = \text{ظا}\tfrac{١}{٢}(\text{د}-\text{ح}) \quad (٢٤)$$

(فى الارتباطات الكائنة بين اضلاع مثلث وزواياه)

(١٧) للاختصار فى حل المثلثات يرمز الى الزوايا بالرموز ح و د و ب الموضوعة فى رؤسها وبالرموز $\overline{\text{ح}}$ و $\overline{\text{د}}$ و $\overline{\text{ب}}$ للاضلاع المقابلة بالتناظر لكل من الزوايا المذكورة ولنتصدى لشرح النظريات التى ينبنى عليها حل المثلثات المستقيمة الاضلاع فنقول

(النظرية الاولى)

(١٨) كل ضلع من اضلاع القائمة فى المثلث القائم الزاوية يساوى الوتر مضروبا فى جيب الزاوية المقابلة لهذا الضلع وليكن حدب المثلث القائم الزاوية المفروض كما فى (شكل ٤) فيجعل النقطة ب مركزا وبنصف قطرمساو للوحدة نرسم القوس ام ومن النقطة م ينزل العمود من على الضلع بح فيكون من = جاب ويحدث من المثلثين المتشابهين بدح و بمن هذه المناسبة

$$\text{حد} : \text{دب} :: \text{من} : \text{مب} \quad \text{اى} \quad \overline{\text{ب}} : \overline{\text{ح}} :: \text{جاب} : ١$$

ومن ذلك ينتج $\overline{\text{ب}} = \overline{\text{ح}}\,\text{جاب}$ وبمثل ذلك يحدث $\overline{\text{د}} = \overline{\text{ح}}\,\text{جاد}$

وحيث

وحيث ان الزاويتين ب و ء متتامتان يكون جا ب = جتا ء
و جا ء = جتا ب فيكون

ت = و جتا ء

و ء = و جتا ب

وحينئذ يقال ان كل ضلع من ضلعى القائمة فى المثلث القائم الزاوية يساوى الوتر مضروبا فى جيب متمم الزاوية المجاورة لهذا الضلع

•(النظرية الثانية)•

(١٩) كل ضلع من ضلعى القائمة فى المثلث القائم الزاوية يساوى ضلعها الآخر مضروبا فى ظل الزاوية المقابلة للضلع الاول

وليفرض ء ح ب المثلث القائم الزاوية كما فى (الشكل ٤) فاذا جعلت النقطة ب مركزا ورسم بنصف قطر مساو للوحدة قوس ا م واقيم من النقطة ا عمود ا ه على الضلع ب ح كان ا ه هو ظل الزاوية ب وحيث ان المثلثين ء ح ب و ه ا ب متشابهان تحدث متناسبة هى

ء ح : ح ب :: ه ا : ا ب أى ت : و :: ظا ب : ١

ومن هنا يحدث ت = ء ظا ب (٢٥)

وبمثل ذلك يكون ء = ت ظا ء

•(النظرية الثالثة)•

(٢٠) كل مثلث مستقيم الاضلاع نسبة جيوب الزوايا الى بعضها فيه كنسبة الاضلاع المقابلة لهذه الزوايا وليكن ب و ح كما فى (شكل ٥)

زاويتين من زوايا المثلث ء ب ح و ء ا العمود النازل من الرأس ء
على القاعدة ب ح فاذا كان هذا العمود واقعاً داخل المثلث ء ب ح
يؤخذ من المثلثين القائمي الزاوية ء ا ب و ء ا ح ان

ء ا = ب جا ء و ء ا = ح جا ب فاذن يكون ب جا ح = ح جا ب

او جا ح : جا ب :: ح : ب

واذا كان العمود واقعاً خارج المثلث على امتداد ب ح كما في (الشكل ٦)

فانه يؤخذ من المثلث القائم الزاوية ا ء ح ان ا ء = ب جا ح ومن

المثلث ا ء ب القائم الزاوية ان ا ء = ح جا ا ب ء وحيث ان الزاوية

ا ب ء مكملة لمجاورتها ء ب ح المرموز لها بالرمز ب من المثلث

المفروض يكون ء ا = ح جا ب فاذن يكون ب جا ح = ح جا ب

ومن هنا تحدث المتناسبة السابقة وهي

جا ح : جا ب :: ح : ب (٢٦)

(النظرية الرابعة)

(٢١) كل مثلث مستقيم الاضلاع مربع ضلع من اضلاعه يساوي مجموع
مربعي الضلعين الآخرين ناقصاً ضعف مستطيل هذين الضلعين مضروباً هذا
الضعف في جيب متمم الزاوية الواقعة بينهما اعني ان

$$ح^٢ = ب^٢ + ء^٢ - ٢ ب ء جتا ح \quad (٢٧)$$

وليفرض ح ء ب المثلث و ء ا العمود النازل من الرأس ء على

القاعدة ح ب فاذا كانت الزاوية ء حادة كما في (الشكل ٥)

حدث بمقتضى نظرية معلومة من الهندسة الاصلية

دب‾^{2} = دح‾^{2} + بح‾^{2} − ٢ بح × اح أى

حَ^{2} = بَ^{2} + دَ^{2} − ٢ دَ × اح

وحيث انه يؤخذ من المثلث القائم الزاوية د ا ح ان ا ح = بَ جتا ح كما فى (بند ٢٠) يحصل بابدال ا ح بمقداره فى المعادلة المتقدمة القانون (٢٧) فاذا كانت الزاوية ب منفرجة كما فى (الشكل ٦) حدث بمقتضى نظرية معلومة من الهندسة الاصلية

بَ^{2} = حَ^{2} + دَ^{2} + ٢ دَ × ب ا

ويؤخذ من المثلث ب د ا ان ب ا = حَ جتا د ب ا لكن حيث ان الزاوية د ب ا مكملة للزاوية د ب ح اى للزاوية ب من المثلث المفروض يحدث جتا د ب ا = − جتا ب فاذن يكون ب ا = − بَ جتا ح وبوضع هذا المقدار فى مقدار بَ^{2} تحصل ايضا المعادلة (٢٧)

(٢٢) النظرية السابقة تكفى وحدها لحل مثلث مستقيم الاضلاع لانها اذا اجريت بطريق التوالى على الاضلاع تحصلت معادلات ثلاث هى

حَ^{2} = بَ^{2} + دَ^{2} − ٢ بَ دَ جتا ح

و بَ^{2} = حَ^{2} + دَ^{2} − ٢ حَ دَ جتا ب

و دَ^{2} = حَ^{2} + بَ^{2} − ٢ حَ بَ جتا د

وهذه المعادلات تتعين بها ثلاثة اجزاء من الستة التى يتركب منها المثلث اذا كانت الثلاثة الاخرى معلومة (الا فى حالتين احداهما استحالة تركيب

المثلث والثانية ان لا يعلم منه غير الزوايا الثلاث)

(في حل المثلثات المستقيمة الاضلاع القوائم الزوايا)

(الحالة الاولى)

(٢٣) اذا علم الوتر ح والزاوية الحادة ب وكان المطلوب ايجاد الزاوية د والضلعين ب و د يقال ان الزاوية د يسهل تحصيلها بطرح الزاوية المعلومة من ٩٠° اى ان د = ٩٠° ــ ب واما الضلعان ب و د فيتعينان بواسطة النظرية الاولى التي يتحصل منها كما في (الشكل ٤)

ب = ح جا ب و د = ح جتا ب

ولا يخفى ان الحسابات تجرى هنا بواسطة اللوغارتمات كما سيأتي بيان ذلك

(الحالة الثانية)

(٢٤) اذا علم ضلع الزاوية القائمة وهو ب وكذا الزاوية الحادة ب وكان المطلوب ايجاد الزاوية د والوتر ح والضلع د يقال ان الزاوية د يسهل تحصيلها ايضا بطرح الزاوية المعلومة من ٩٠° اى ان د = ٩٠° ــ ب واما الوتر ح فيتعين من النظرية الاولى بواسطة الارتباط ب = ح جا ب الذى يؤخذ منه أن ح = ب/جا ب

واما الضلع د فيتعين من النظرية الثانية بواسطة الارتباط

د = ب ظا د او د = ب ظتا ب كما في (الشكل ٤)

(الحالة

(الحالة الثالثة)

(٢٥) اذا علم الوتر $\bar{ح}$ والضلع $\bar{ب}$ وكان المطلوب ايجاد الضلع الآخر والزاويتين ب و د كما في (الشكل ٤) يقال انه يعلم من خاصية المثلث القائم الزاوية ان $\bar{د}^2 = \bar{ح}^2 - \bar{ب}^2$ ومنه يؤخذ $\bar{د} = \sqrt{(\bar{ح}+\bar{ب})(\bar{ح}-\bar{ب})}$ وهو مقدار يسهل حسابه باللوغارتمات

واما الزاوية ب فتتعين بواسطة الارتباط $\bar{ب} = \bar{ح}$ جا ب كما هو مقتضى (النظرية الاولى) ومن هنا يكون جا ب $= \frac{\bar{ب}}{\bar{ح}}$ واما زاوية د فتتعين بطرح الزاوية المعلومة ب من 90° اى ان د $= 90^\circ -$ ب

ولو بدأ بالبحث عن الزاويتين لكان ينبغى تعيين الضلع د بواسطة الارتباط

$\bar{د} = \bar{ح}$ جا د

(الحالة الرابعة)

(٢٦) اذا علم ضلعا الزاوية القائمة وهما $\bar{ب}$ و $\bar{د}$ وكان المطلوب ايجاد الوتر $\bar{ح}$ والزاويتين ب و د كما فى (الشكل ٤) يبدء بتعيين الزاوية ب بواسطة الارتباط $\bar{ب} = \bar{د}$ ظا ب كما هو مقتضى (النظرية الثانية) واما الزاوية د فتحصل بواسطة الارتباط د $= 90^\circ -$ ب واما الوتر $\bar{ح}$ فيتعين بواسطة الارتباط $\bar{ب} = \bar{ح}$ جا ب كما هو مقتضى (النظرية الاولى)

ويمكن البدء بتعيين الوتر $\bar{ح}$ بواسطة القانون $\bar{ح} = \sqrt{\bar{ب}^2 + \bar{د}^2}$ لكن من حيث انه لا يمكن تحليل الكمية ذات الحدين $\bar{ب}^2 + \bar{د}^2$ الى حد

واحد لا يمكن حساب هذا القانون باللوغارتمات وعليه فالاولى ان يبدء بتعيين الزاوية ب ثم يتوصل بها الى تعيين الوتر حَ

(فى حل المثلثات المستقيمة الاضلاع غير القوائم الزوايا)

(الحالة الاولى)

(٢٧) اذا علم ضلع وزاويتان من مثلث وكان المطلوب ايجاد ما بقى منه يقال اذا طرح مجموع الزاويتين المعلومتين من ١٨٠° حدث مقدار الزاوية الثالثة واما الضلعان بَ و حَ فانهما يتعينان بمقتضى (النظرية الثالثة) كما فى (الشكل ٥) بواسطة المتناسبتين

جا ح : جا ب :: حَ : بَ و

جا ح : جا ء :: حَ : ءَ

(الحالة الثانية)

(٢٨) اذا علم الضلعان حَ و بَ والزاوية ح المقابلة لاحدهما وكان المطلوب ايجاد الضلع الثالث ءَ والزاويتين الاخريين ب و ء نستعمل فى ذلك طريقة سهلة وهى أن يبدء بالبحث عن الزاوية ب المقابلة للضلع بَ بواسطة المناسبة

حَ : بَ :: جا ح : جا ب

وحيث ان الزاويتين ح و ب معلومتان تكون الزاوية

ء = ١٨٠° ـ (ح+ب) واما الضلع ءَ فيتعين بواسطة هذه المناسبة

جا ح : جا ء :: حَ : ءَ

مناقشة

(مناقشة هذا الحل)

المناسبة الاولى يؤخذ منها ان

$$\text{جا ب} = \frac{\text{بَ جا ح}}{\text{حَ}}$$

وبواسطة الجداول تتعين الزاوية ب الا انه يلزم التنبيه على ان الجداول اللوغارتميه لا يوجد بها الا زوايا حادة اعنى دون 90° وحيث ان الجيب الواحد يقابل زاويتين متكاملتين احداهما حادة والاخرى منفرجة يقال اذا جعل م رمز الزاوية الجداول تحصل للزاوية ب مقداران احدهما

ب = م والثانى ب = 180° − م

ولتعيين الحالة التى يلزم فيها اخذ المقدار الاول او الثانى او الاثنين معا يقال اولا اذا كانت الزاوية ح المعلومة قائمة او منفرجة كما فى (الشكل ٧) كانت الزاويتان الاخريان حادتين وحينئذ يؤخذ ب = م ولعدم استحالة رسم المثلث يلزم ان يكون حَ > بَ

وثانيا اذا كانت الزاوية ح المعلومة حادة وكان ح > ب كما فى (الشكل ٨) كانت الزاوية ح > ب

وفى هذه الحالة يلزم ايضا ان يؤخذ ب = م

وثالثا اذا كانت الزاوية ح المعلومة حادة وكان حَ < بَ فانه يؤخذ بالاختيار ب = م او ب = 180° − م لانه اذا اخذت كما فى (الشكل ٩) الزاوية الحادة ب ح د = ح والضلع ح د = بَ وجعلت النقطة د مركزا وجعل الضلع حَ نصف قطر ورسم به قوس دائرة فانه يقطع ح ب فى النقطتين ب و بً وحينئذ يحدث المثلثان

ح ء ب و ح ء بَ اللذان تكون فيهما الزاويتان ح ب ء و ح بَ ء مكملتين لبعضهما

ومن هنا يشاهد انه يلزم للحصول على حلين ان يكون الضلع حَ المفروض انه اصغر من الضلع بَ اكبر من العمود ء ا النازل على الضلع ح ب

فاذا كان الضلع حَ مساويا للعمود ا ء كان القوس المرسوم بنصف القطر حَ مماسا للضلع ح ب وبذلك يؤل الحلان الى المثلث القائم الزاوية ح ء ا فقط وبالجملة فانه يستحيل رسم المثلث اذا كان الضلع حَ اصغر من العمود ء ا وهذه الاستحالة تظهر من مقدار جا ب لانه يؤخذ من

المثلث ح ء ا القائم الزاوية ان ء ا = بَ جا ح وحيث ان حَ بالفرض اصغر من ء ا يحدث

حَ < بَ جا ح ومن هنا يؤخذ $\frac{\text{بَ جا ح}}{\text{حَ}}$ > ١ اعنى ان جا ب > ١ وحيث انه لا يوجد جيب اكبر من الواحد فلا يمكن رسم المثلث

(الحالة الثالثة)

(٢٩) اذا علم من مثلث ضلعان حَ و بَ والزاوية ء الواقعة بينهما وكان المطلوب ايجاد الضلع ءَ والزاويتين ح و ب يقال .

اولا حيث ان الزاوية ء معلومة يتحصل بطرحها من ١٨٠° مجموع الزاويتين المجهولتين ح و ب وبجعل مْ رمزا لهذا المجموع يحدث

ح + ب = مْ فان امكن تحصيل فاضلهما ح ـ ب الذى يرمز له بالرمز ذْ تحصلت كلتاهما بالسهولة وللوصول الى تحصيل الفاضل ذْ

بين

بين الزاويتين المذكورتين تستعمل النظرية الثالثة فيحدث

$$\bar{ح} : \bar{ب} :: جا ح : جا ب$$

وهي متناسبة يؤخذ منها

$$\bar{ح} + \bar{ب} : \bar{ح} - \bar{ب} :: جا ح + جا ب : جا ح - جا ب$$

ومن المعلوم انه يحدث بناء على الارتباط (٢٢)

$$جا ح + جا ب : جا ح - جا ب :: ظا \tfrac{1}{2}(ح+ب) : ظا \tfrac{1}{2}(ح-ب)$$

فاذن يحصل

$$\bar{ح} + \bar{ب} : \bar{ح} - \bar{ب} :: ظا \tfrac{1}{2}(ح+ب) : ظا \tfrac{1}{2}(ح-ب)$$

وحيث ان المجموع ح + ب معلوم يكون ظا $\tfrac{1}{2}$ (ح+ب) معلوما وتكون الحدود الثلاثة الاول من هذه المتناسبة معلومة وحينئذ يمكن ان يستخرج منها مقدار $\tfrac{1}{2}$ (ح - ب) ومن ذلك يؤخذ ح - ب اعني الفاضل ڤ وحيث علم المجموع م للزاويتين ح و ب وفاضلهما ڤ يحدث

$$ح = \tfrac{1}{2}(م + ڤ) \quad و \quad ب = \tfrac{1}{2}(م - ڤ)$$

وحيث علم كل من الزاويتين ح و ب يتعين الضلع $\bar{ى}$ من هذه المتناسبة

$$جا ح : جا ى :: \bar{ح} : \bar{ى}$$

(الحالة الرابعة)

(٣٠) اذا علمت الاضلاع الثلاثة $\bar{ح}$ و $\bar{ب}$ و $\bar{ى}$ وكان المطلوب ايجاد الزوايا الثلاث ح و ب و ى يقال حيث انه يحدث بمقتضى النظرية الرابعة ان $\bar{ح}^2 = \bar{ب}^2 + \bar{ى}^2 - 2\,\bar{ب}\,\bar{ى}$ جتا ح فيكون

$$\text{جتا}\ ح = \frac{ب^{2} + د^{2} - ح^{2}}{2\,ب\,د}$$

وحيث ان هذا القانون غير لوغاريتمي يجب البحث عن قانون يسهل حسابه باللوغاريتم بان يؤخذ من القانون (١٢) من (بند ١١)

$$2\,\text{جا}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,ح = 1 - \text{جتا}\ ح$$

وبوضع مقدار جتا ح في هذه المعادلة تؤل الى

$$2\,\text{جا}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,ح = 1 - \frac{ب^{2}+د^{2}-ح^{2}}{2\,ب\,د} = \frac{ح^{2}-ب^{2}-د^{2}+2\,ب\,د}{2\,ب\,د}$$

$$= \frac{ح^{2}-(ب-د)^{2}}{2\,ب\,د} = \frac{(ح+ب-د)(ح-ب+د)}{2\,ب\,د}$$ فاذن يكون

$$\text{جا}\,\tfrac{1}{2}\,ح = \sqrt{\frac{(ح+ب-د)(ح-ب+د)}{4\,ب\,د}}$$

ولاختصار هذا القانون يجعل محيط المثلث $ح + ب + د = 2\,ل$ فيحدث

$$ح + ب - د = 2\,ل - 2\,د = 2\,(ل - د)$$ و

$$ح - ب + د = 2\,ل - 2\,ب = 2\,(ل - ب)$$

واذن يكون

$$\text{جا}\,\tfrac{1}{2}\,ح = \sqrt{\frac{(ل-ب)\,(ل-د)}{ب\,د}}$$

ومن هنا يؤخذ قاعدة هي انه يلزم لايجاد جيب نصف زاوية من زوايا المثلث ان يطرح على التوالي من نصف محيط هذا المثلث الضلعان المحيطان بالزاوية المطلوبة وان يقسم حاصل ضرب الباقيين على حاصل ضرب الضلعين المذكورين ثم يؤخذ جذر خارج القسمة فيتحصل جيب نصف الزاوية المطلوب

المطلوب

(٣١) اذا استخرج جا $\frac{1}{2}$ ح و جتا $\frac{1}{2}$ ح وضرب الاول فى الثانى حدث

$$\text{جا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح} \times \text{جتا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح} = \sqrt{\frac{\text{ل}(\text{ل}-\bar{\text{ح}})(\text{ل}-\bar{\text{ب}})(\text{ل}-\bar{\text{د}})}{\bar{\text{ب}}^{2}\,\bar{\text{د}}^{2}}}$$

فاذا ضرب كل من طرفى هذه المعادلة فى ٢ ولوحظ ان جا ح = ٢ جا $\frac{1}{2}$ ح × جتا $\frac{1}{2}$ ح حدث

$$\text{جا ح} = \frac{2}{\bar{\text{ب}}\,\bar{\text{د}}}\sqrt{\text{ل}(\text{ل}-\bar{\text{ح}})(\text{ل}-\bar{\text{ب}})(\text{ل}-\bar{\text{د}})}$$

وهذا القانون يستعمل فى ايجاد مساحة المثلث بواسطة اضلاعه

(فى اخذ مساحة سطح المثلث بواسطة اضلاعه)

(٣٢) من المعلوم ان سطح اى مثلث كالمثلث ح ب د كما فى (شكل ٥) يساوى نصف حاصل ضرب القاعدة فى الارتفاع فاذا جعل ع رمز السطح المثلث حدث

$$\text{ع} = \tfrac{1}{2}\,\text{ح ب} \times \text{ا د} = \tfrac{1}{2}\,\bar{\text{د}} \times \text{ا د}$$

وحيث ان ا د الذى هو ارتفاع المثلث يساوى $\bar{\text{ب}}$ جا ح بمقتضى النظرية الاولى يحدث

$$\text{ع} = \tfrac{1}{2}\,\bar{\text{د}} \times \bar{\text{ب}}\ \text{جا ح}$$

وبابدال جا ح بمقداره السابق فى بند (٣١) يحدث

$$\text{ع} = \sqrt{\text{ل}(\text{ل}-\bar{\text{ح}})(\text{ل}-\bar{\text{د}})(\text{ل}-\bar{\text{ب}})}$$

وهذا القانون يدل على انه يلزم لايجاد سطح مثلث بواسطة اضلاعه الثلاثة ان يضرب نصف محيطه فى حاصل ضرب البواقى الثلاثة المحصلة من طرح اضلاعه الثلاثة من نصف المحيط المذكور وان يؤخذ جذر حاصل الضرب فيحصل المطلوب

فى رد نصف القطر الى اصله فى القوانين التى فرض فيها انه يساوى واحدا

حيث ان القوانين المستعملة فى حساب المثلثات تكونت بفرض نق = ١
وان الجداول المحسوب فيها مقادير الخطوط المساحية ولوغارتماتها
مفروض فيها نق = ١٠^١٠ يؤخذ من ذلك انه يلزم لرد نصف القطر الذى فرض
مساويا للواحد الى اصله ان تستعوض الكميات جاء و جتاء و ظاء و الخ

فى القوانين بالنسب $\frac{\text{جاء}}{\text{نق}}$ و $\frac{\text{جتاء}}{\text{نق}}$ و $\frac{\text{ظتاء}}{\text{نق}}$ و الخ

فلرد نصف القطر الى اصله فى القانون ب = ح جا ب يكتب

ب = ح $\frac{\text{جا ب}}{\text{نق}}$ ولرده الى اصله فى القانون جا ب = ٢ جا ½ ب جتا ½ ب

يكتب

$$\frac{\text{جا ب}}{\text{نق}} = \frac{\text{٢ جا ½ ب جتا ½ ب}}{\text{نق}^{2}}$$

(فى تكوين جداول الخطوط المساحية)

(٣٣) قد تقدم فى حل المثلثات ان الزوايا تستعوض بخطوطها المساحية
ولنتصدى الآن للبحث عن تعيين المقادير الرقمية للخطوط المساحية المقابلة
لقسى تاخذ فى الازدياد من ١٠ً الى ١٠ً بالنسبة لتقسيم المحيط الى
٣٦٠ْ (ومقادير الخطوط المساحية بنسبة نصف القطر تسمى بالاعداد
المساحية) فنقول مما ينبغى التنبيه عليه ان الخطوط المساحية تأخذ
فى الربع الاول من المحيط جميع ما يمكن ان تاخذه من المقادير فيلزم تعيين
مقادير الخطوط المذكورة المقابلة للقسى المحصورة بين ٠ْ و ٩٠ْ وانما
اقتصر فى الحساب على الخطوط المساحية المقابلة للقسى من ٠ْ الى ٤٥ْ
لان القسى الباقية متممة للقسى من ٠ْ الى ٤٥ْ

وحيث

وحيث ان الارتباطات الموجودة بين الخطوط المساحية لقوس واحد يسهل بها تعيينها بالنسبة للجيب اذا كان معلوما ينبغي ان تتصدى لتعيينه اولا فنقول ان اصغر القسي الذي يلزم اعتباره قوس ١٠″ ولنبحث الآن عن جيب هذا القوس فنقول ان النسبة بين محيط الدائرة وقطرها

$$ط = ٣٫١٤١٥٩ \ ٢٦٥٣٥ \ ٨٩٧٩٣$$

وان نصف القطر عندما يفرض مساويا للواحد يكون نصف المحيط مساويا ط

وحيث انه يوجد في نصف المحيط ٦٤٨٠٠٠ ثانية اى ١٨٠°

يشاهد بالنسبة الى نصف القطر ان قوس ١٠″ = $\frac{ط}{٦٤٨٠٠}$ =

٠٫٠٠٠٠٤ ٨٤٨١٣ ٦٨١١٠

وحيث ان القوس صغير جدا ولا يختلف عن جيبه الا اختلافا يكاد لا يحس

يكون العدد المتحصل هو مقدار جا ١٠″

ولبيان ذلك نبرهن على ان الجيب يكون دائما اصغر من قوسه واكبر منه مطروحا منه ربع مكعبه اعني انه يتحصل (بجعل ى رمز القوس دون ٩٠°) ى > جاى و جاى > ى − $\frac{١}{٤}$ ى^{٣} وهذا البرهان يؤخذ ايضا من نظرية هي

ان القوس يكون اكبر من جيبه واصغر من ظله متى كان دون ربع المحيط لان المثلث مقا كما في (الشكل ١٠) من حيث انه اكبر من القطع و ام والقطع اكبر من المثلث و ام يحدث $\frac{١}{٢}$ اق × وا > $\frac{١}{٢}$ قوس ام × او ونصف قوس ام × او > $\frac{١}{٢}$ من × وا و من هو ارتفاع المثلث و ام وبحذف الكمية المشتركة $\frac{١}{٢}$ او من هاتين المتباينتين يحدث

إ ك > قوس ام وقوس ام > م ن اعنى ان ظل القوس > منه والقوس > من جيبه اذا تقرر هذا وضع ظا ½ ى > ½ ى فاذا ضرب طرفا هذه المتباينة فى جتا² ½ ى تحصل جا ½ ى جتا ½ ى > ½ ى جتا² ½ ى واذا ضرب كل من طرفى هذه المتباينة فى ٢ تحصل جا ى > ى جتا² ½ ى

أو جا ى > ى (١ — جا² ½ ى) وحيث ان الجيب اصغر من قوسه يكون

جا ى > ى (١ — ¼ ى²) او جا ى > ى — ¼ ى³ واذن يكون

ى > جا ى و جا ى > ى — ¼ ى³ وحينئذ يثبت المطلوب وهو أن القوس يكون اكبر من جيبه والجيب اكبر من قوسه مطروحا منه ربع مكعبه

(٣٤) اذا تقرر هذا واجرى ما تقدم على القوس ١٠ً الذى تعين مقداره فى (بند ٣٣) يقال اذا جعل الرقم الخامس من المقدار الاعشارى لهذا القوس ٥ بان اضيف اليه واحد حدث قوس ١٠ً > ٠٫٠٠٠٠٥

فاذن يتحصل ¼ (قوس ١٠ً)³ > ٠٫٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٣٢
ومن هنا يحدث

جا ١٠ً > { ٠٫٠٠٠٠٤ ٨٤٨١٣ ٦٨١١٠ — ٠٫٠٠٠٠٠ ٠٠٠٠٠ ٠٠٠٣٢ }

فاذا اجريت عملية الطرح حدث

جا ١٠ً > ٠٫٠٠٠٠٤ ٨٤٨١٣ ٦٨٠٧٨

ومن هنا يشاهد أن جا ١٠ً لم يختلف عن مقدار قوس ١٠ً الا من ابتداء الرقم الثالث عشر الاعشارى ومن ذلك يعلم انه اذا جعل جا ١٠ً = ٠٫٠٠٠٠٤ ٨٤٨١٣ ٦٨١

كان

كان الخطا الحاصل دون واحد من الرقم الثالث عشر الاعشاري فاذا وضع

مقدار تجا ١٠ً في $\sqrt{١ - جا^٢ ١٠ً}$ تحصل

جتا ١٠ً = ٠٫٩٩٩٩٩ ٩٩٩٨٨ ٢٤٨

وبناء على ذلك يسهل تحصيل المقادير المتوالية للجيوب وجيوب المتمم

للقسي ٢٠ً و ٣٠ً وهكذا الى ٤٥ْ بالقانون

جا (ص + س) + جا (ص − س) = ٢ جا ص جتا س

الذي يتحصل منه جيب اى قوس بنسبته الى جيوب قسى اصغر منه لانه اذا

جعل فيه ص = (م + ١) س حدث

جا (م + ٢) س + جا م س = ٢ جتا س جا (م + ١) س

او جا (م + ٢) س = ٢ جتا س جا (م + ١) س − جا م س

فاذا اخذت الكمية م جميع المقادير تحصلت جيوب سائر القسى لانه

اذا جعل

م = ٠ حدث جا ٢ س = ٢ جتا س جا س

و م = ١ حدث جا ٣ س = ٢ جتا س جا ٢ س − جا س

و م = ٢ حدث جا ٤ س = ٢ جتا س جا ٣ س − جا ٢ س

و م = ٣ حدث جا ٥ س = ٢ جتا س جا ٤ س − جا ٣ س

و .... الخ

ومتى تحصلت الجيوب تحصلت جيوب المتمم بنسبتها اليها وتحصلت كذلك سائر

الخطوط المساحية الاخرى بواسطة الارتباطات (١) و (٢) و (٣)

و (٤) و (٥)

(٣٥) انما اجريت الاعمال الرقمية على لوغاريتمات الجيوب والظلال

وظلال المتمم وجيوب المتمم دون الاعداد المساحية المعتادة لتسهيل

الحسابات ولذا وضعت جداول تحتوى على لوغاريتمات هذه الخطوط الاربعة المساحية لقسى آخذة فى الازدياد من ٠َ ١ الى ١ ٠ُ فاذا فرض كما تقدم ان نق = ١ كانت الجيوب وجيوب المتمم كلها كسرية وبناء على ذلك تكون مقادير لوغاريتمات سالبة ولاجتناب هذه اللوغاريتمات السالبة يؤخذ نصف القطر مساويا $١٠^{١٠}$ وحينئذ تضرب المقادير المتحصلة للخطوط المساحية بفرض نق = ١ فى $١٠^{١٠}$ فاذا اجرى العمل بهذه المثابة سهل معرفة ان لوغاريتم الجيب الواحد لا يكون سالبا الا فى الحالة التى يكون فيها القوس كسرا من $١٠^{١٠}$ اى كسرا صغيرا يمكن اهماله (لانه اذا كان لوغاريتم الجيب سالبا عند ما يكون نق = $١٠^{١٠}$ يكون القوس المقابل له اصغر من واحد من مائة الف من $١٠^{١٠}$)

وبعد تعيين لوغاريتمات الجيوب وجيوب المتمم تعين لوغاريتمات الظلال وظلال المتمم بواسطة القانون

$$\text{ظا } ح = \frac{\text{نق جا } ح}{\text{جتا } ح} \quad \text{و} \quad \text{ظتا } ح = \frac{\text{نق جتا } ح}{\text{جا } ح}$$

اللذين يؤخذ منهما

$$\text{لو ظا } ح = \text{لو جا } ح + ١٠ - \text{لو جتا } ح$$

$$\text{و لو ظتا } ح = \text{لو جتا } ح + ١٠ - \text{لو جا } ح$$

واما القواطع وقواطع المتمم فانها لا تستعمل عادة لكن اذا اريد تحصيل لوغاريتماتها استعمل فى ذلك القانون

$$\text{قا } ح = \frac{\text{نق}^٢}{\text{جتا } ح} \quad \text{و} \quad \text{قتا } ح = \frac{\text{نق}^٢}{\text{جا } ح}$$

فى شرح

(في شرح الجدول اللوغاريتمي المعرب)

(٣٦) هذا الجدول يتركب من ثلاثة اجزاء اولها يشتمل على لوغاريتمات الاعداد من ١ الى ١٠٠٨٠ وتركيبه واستعماله موضحان في علم الجبر

وثانيها يشتمل على لوغاريتمات الخطوط الاربعة المساحية وهي الجيب وجيب المتمم والظل وظل المتمم لجميع الزوايا مبتدأة من الصفر الى °٩٠ والخطوط المساحية المذكورة محسوبة بفرض نصف قطر الدائرة يساوي 10^{10} اى ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ١٠ اى عشرة بلايين وحينئذ يكون لوغاريتم نصف القطر المذكور مساويا ١٠

وهذه اللوغاريتمات موضوعة في الصفوف المعنونة بلفظي نسبة جيبيه ونسبة ظليه بكيفية ان الاول منها موضوع فيه لوغاريتمات الجيوب والثاني موضوع فيه لوغاريتمات جيوب المتممات والثالث لوغاريتمات الظلال والرابع لوغاريتمات ظلال المتممات لجميع الزوايا التي دون °٤٥ التي يوجد درجها في رأس كل صحيفة ودقائقها في الصف الاول من جهة اليمين المعنون بلفظة دقائق واما الزوايا المحصورة بين °٤٥ و °٩٠ فيوضع درجها اسفل كل صحيفة ودقائقها في الصف الاول من جهة الشمال واما اللوغاريتمات خطوطها المساحية فهي عين السابقة غير ان الظل يعتبر ظلا للمتمم وبالعكس والجيب جيبا للمتمم وبالعكس وهذه اللوغاريتمات مأخوذة الى سبعة ارقام اعشارية والاعداد البيانية هي الموضوعة في رأس كل صف من جهة الشمال تحت العلامة ⌒ واستعمال هذا الجدول يرجع الى مسألتين

(المسألة الاولى)

(٣٧) اذا علمت زاوية وكان المطلوب ايجاد لوغاريتم الجيب وجيب المتمم والظل وظل المتمم يقال

اذا كانت الزاوية المعلومة لاتشتمل الاعلى درج ودقائق فقط تؤخذ لوغارتمات خطوطها المناسبة من الجدول وهى موجودة فى الصف الافقى المحاذى لدقائقها

(٣٨) واما اذا اشتملت الزاوية زيادة عن الدرج والدقائق على مقدار من الثوانى ففى ذلك احوال

الحالة الاولى اذا اريد تعيين لوغاريتم جيب زاوية معلومة يقال

اولا اذا كانت الزاوية المعلومة حادة يؤخذ فى مبدء الامر من الجدول لوغاريتم جيب الدرج والدقائق التى تشتمل عليها هذه الزاوية ثم يبحث عن الكمية س التى يلزم اضافتها الى هذا اللوغاريتم ليكون اللوغاريتم المطلوب عند زيادة الزاوية المشتملة على الدرج والدقائق فقط بعدد من الثوانى اصغر من ٦٠ وحيث ان لوغاريتم جيب هذه الزاوية يزداد بالنسبة لعدد الثوانى المذكورة يقال ان نسبة العدد ٦٠ الموجود فى الدقيقة الواحدة الى عدد ثوانى الزاوية المعلومة كنسبة الفرق بين اللوغاريتمين المتواليين الجدوليين لجيبى الزاويتين اللتين توجد بينهما الزاوية المعلومة الى الكمية س التى يلزم اضافتها الى اصغر اللوغاريتمين الجدوليين ليكون اللوغاريتم المطلوب

فاذا اريد تعيين لوغاريتم جيب ٩ ٥ ٣٧ مثلا يقال حيث ان هذا اللوغاريتم محصور بين لو جا ٥ ٣٧ و لو جا ٦ ٣٧ يبحث عن الكمية س التى يلزم اضافتها الى لو جا ٥ ٣٧ ليتحصل لو جا ٩ ٥ ٣٧ ولذا يفرض ان نسبة الفرق ٦٠ بين الزاويتين ٥ ٣٧ و ٦ ٣٧ اللتين توجد بينهما الزاوية المعلومة الى الفرق

بين

بين الزاوية المعلومة والتى هى اصغر منها ٥َ ٣٧ْ كنسبة الفرق ٠٠٠١٦٧١ر٠
بين لوغاريتمى جيبى الزاويتين اللتين يوجد بينهما الزاوية المعلومة الى الفرق
المطلوب س بين لوجا ٥َ ٣٧ْ ولوجا ٩ً ٥َ ٣٧ْ وبناء على ذلك يحدث
٦٠ً : ٩ً :: ٠٠٠١٦٧١ر٠ : س ومنها يستخرج س = ٠٠٠٠٢٥١ر٠
وباضافة ٠٠٠٠٢٥١ر٠ الى اللوغاريتم ٩ر٧٨٠٣٠٠٠ لجيب
٥َ ٣٧ْ يكون المجموع ٩ر٧٨٠٣٢٥١ هو اللوغاريتم المطلوب لجيب
٩ً ٥َ ٣٧ْ

وبهذه الكيفية يوجد لوجا ٥١ً ٥٤َ ٥٢ْ = ٩ر٩٠١٨٥٧٦
وثانيا اذا كانت الزاوية المعلومة منفرجة ترجع هذه الحالة الى الحالة
السابقة وذلك بان تطرح الزاوية المعلومة من ١٨٠ْ ويبحث عن لوغاريتم
جيب الزاوية الحادثة من الطرح فيكون هو اللوغاريتم المطلوب لانه تقدم
ان جيب الزاوية هو عين جيب مكملتها

(٣٩) الحالة الثانية اذا كان المطلوب تعيين لوغاريتم ظل الزاوية ٩ً ٥َ ٣٧ْ
اخذ من الجدول لوغاريتم ظل ٥َ ٣٧ْ الذى هو ٩ر٨٧٨٤٢٨١
والفرق ٠٠٠٢٦٢٦ر٠ بين لوغاريتمى ظلى الزاويتين ٥َ ٣٧ْ و ٦َ ٣٧ْ
اللتين توجد بينهما الزاوية المعلومة ٩ً ٥َ ٣٧ْ ولتعيين الكمية س التى
يلزم اضافتها الى لوظا ٥َ ٣٧ْ ليتكون من ذلك اللوغاريتم المطلوب توضع
هذه المناسبة ٦٠ً : ٩ً :: ٠٠٠٢٦٢٦ر٠ : س ومنها يستخرج
س = ٠٠٠٠٣٩٤ر٠ وباضافة ٠٠٠٠٣٩٤ر٠ الى ٩ر٨٧٨٤٢٨١

يحدث المجموع ٩٫٨٧٨٤٦٧٥ وهو اللوغاريتم المطلوب

فاذا كان المطلوب تعيين لوغاريتم ظل ١َ ٥ ٤َ ٥ ٢ْ أخذ من الجدول

لوغاريتم ظل ٥٤َ ٥ ٢ْ فيكون ١٠٫١٢١٣٠٩٣ هو اللوغاريتم

المذكور ولايجاد الكمية س التي يلزم اضافتها الى هذا اللوغاريتم ليكون

اللوغاريتم المطلوب يؤخذ الفرق ٠٫٠٠٠٢٦٢٦ بين لوظا ٥٤َ ٥ ٢ْ

ولوظا ٥٥َ ٥ ٢ْ وتوضع هذه المناسبة ٦٠ : ١٥ :: ٠٫٠٠٠٢٦٢٦

: س ومنها يحدث س = ٠٫٠٠٠٢٢٣٢

وباضافة مقدار س الى اللوغاريتم ١٠٫١٢١٣٠٩٣ يحدث

١٠٫١٢١٥٣٢٥ وهو اللوغاريتم المطلوب

(تنبيه)

يلزم لايجاد ظل زاوية منفرجة ان يبحث عن لوغاريتم ظل مكملة هذه الزاوية

ويقرن الناتج عن يمينه بالعلامة — ولذا يوضع

لوظا ٩َ ٥َ ١٢٧ْ = — ١٠٫١٢١٥٣٢٥

وهذا التنبيه يستعمل ايضا في جيب المتمم وظل المتمم لزاوية منفرجة

(٤٠) الحالة الثالثة اذا علمت زاوية حادة وكان المطلوب تعيين لوغاريتم

جيب متممها اوظل متممها ففي ذلك طريقتان

الطريقة الاولى حيث ان جيب المتمم وظل المتمم للزاوية ا هو عين

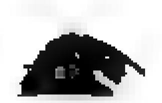
الجيب والظل للمتمم (٩٠ — ا) للزاوية ا يمكن ترجيع هذه

الحالة الى احدى الحالتين السابقتين وذلك بالبحث عن جيب اوظل متمم

الزاوية المعلومة

فاذا كان المطلوب تعيين لوغاريتم جيب المتمم وظل المتمم للزاوية ١َ ٥ ٤َ ٥ ٣ْ

يحث



بحث عن متمم الزاوية ٥١ ٥٤ ٥٢ الذى هو ٩ ٥ ٣٧ ثم عن لوغاريتم جيب الزاوية ٩ ٥ ٣٧ ولوغاريتم ظلها فيشاهد أن اللوغارتمين المطلوبين هما

٩٫٨٧٨٤٦٧٥ و ٩٫٧٨٠٣٤٥١

الطريقة الثانية ان يعين اللوغاريتم المطلوب كما عينت لوغاريتمات الجيوب ولوغاريتمات الظلال غير انه يلاحظ ان جيب المتمم وظل المتمم يتناقصان اذا زادت الزاوية وان الحد الرابع من كل متناسبة يطرح من اكبر اللوغاريتمين الجدوليين المنسوبين للزاويتين اللتين توجد بينهما الزاوية المعلومة

فاذا اريد تعيين لوغاريتم جيب متمم الزاوية ٥١ ٥٤ ٥٢ يقال

حيث ان الزاوية المعلومة محصورة بين ٥٤ ٥٢ و ٥٥ ٥٢ يكون اللوغاريتم المطلوب محصورا بين اللوغاريتمين الجدوليين ٩٫٧٨٠٤٦٧١

و ٩٫٧٨٠٣٠٠٠ لجيب متمم ٥٤ ٥٢ وجيب متمم ٥٥ ٥٢ وحيث ان الفرق بين هذين اللوغاريتمين هو ٠٫٠٠٠١٦٧١ يشاهد انه

اذا زادت الزاوية ٥٤ ٥٢ بمقدار ١ اى ٦٠ ينقص اللوغاريتم ٩٫٧٨٠٤٦٧١ لجيب متمم هذه الزاوية بقدر ٠٫٠٠٠١٦٧١ ولايجاد الكمية التى ينقص بها اللوغاريتم المذكور اذا زادت الزاوية

٥٤ ٥٢ بقدر ٥١ توضع هذه المتناسبة ٦٠ : ٥١ :: ٠٫٠٠٠١٦٧١ : س ومنها يستخرج س = ٠٫٠٠٠١٤٢٠ ثم يطرح ٠٫٠٠٠١٤٢٠

من لوجتا ٥٤ ٥٢ فيكون الباقى ٩٫٧٨٠٣٢٥١ هو اللوغاريتم

المطلوب

تنبيه * بدل ان يبحث عن المقدار الذى يلزم طرحه من لوجتا ٥٤ ٢ ٥

لتعين لوجا ١ ٥٤ ٢ ٥ يجب ان يلاحظ ان الفرق بين ٥٥ ٢ ٥

١ ٥٤ ٢ ٥ هو ٩ فيكفى لذلك تعيين ما يزيد به

اللوغاريتم ٩٫٧٨٠٣٠٠٠ لجيب متمم ٥٥ ٢ ٥ اذا نقصت الزاوية

٥٥ ٢ ٥ بمقدار ٩ وآلت الى ١ ٥٤ ٢ ٥ وحينئذ توضع هذه

المناسبة ٦٠ : ٩ :: ٠٫٠٠٠١٦٧١ : س ومنها يستخرج س

= ٠٫٠٠٠٠٢٥١ وباضافة مقدار س الى اللوغاريتم ٩٫٧٨٠٣٠٠٠

لجيب متمم ٥٥ ٢ ٥ يكون المجموع ٩٫٧٨٠٣٢٥١ هو اللوغاريتم

المطلوب لجيب متمم ١ ٥٤ ٢ ٥ وبهذه الكيفية يشاهد

ان لو ظتا ١ ٥٤ ٢ ٥ = ٩٫٨٧٨٤٦٧٥

(المسئلة الثانية)

(٤١) اذا علم لوغاريتم جيب او جيب متمم او ظل او ظل متمم لزاوية واريد تعيين الزاوية المذكورة يقال انه اذا وجد اللوغاريتم المعلوم بتمامه فى الجدول علمت الزاوية المطلوبة بلا واسطة من الجدول واذا لم يوجد ذلك اللوغاريتم فى الجدول ففى ذلك احوال

الحالة الاولى ان يكون المعلوم لوغاريتم جيب زاوية والمطلوب تعيين هذه الزاوية ولنوضح ذلك بمثالين فنقول

المثال الاول ان يكون المعلوم لوجا س = ٩٫٧٨٠٣٢٥١ بفرض س رمز الزاوية المطلوبة

فحيث

فحيث ان اللوغاريتم ٩٫٧٨٠٣٢٥١ اصغر من اللوغاريتم

٩٫٨٤٩٤٨٥٠ المنسوب لجيب الزاوية ٤٥° تكون الزاوية س

اقل من ٤٥° فحينئذ يبحث عن هذا اللوغاريتم المعلوم فى الصفوف

الرأسية التى توجد بها لوغاريتمات الجيوب فيشاهد انه محصور بين اللوغاريتمين

٩٫٧٨٠٣٠٠٠ و ٩٫٧٨٠٤٦٧١ المنسوبين الى جا ٥َ ٣٧°

و جا ٦َ ٣٧° وحيث ان س تشتمل على ٥َ ٣٧° + رً يلزم لتعيين

مقدار هذه الزاوية ان توضع هذه المناسبة

وهى ان نسبة الفرق ٠٫٠٠٠١٦٧١ بين اللوغاريتمين الجدولين المتواليين

اللذين يوجد بينهما اللوغاريتم المعلوم الى الفرق ٠٫٠٠٠٠٢٥١ بين

اللوغاريتم المعلوم واصغر اللوغاريتمين الجدولين كنسبة ٦٠ً الى رً

ومنها يستخرج رً = ٩ً وعليه فيكون ٩ً ٥َ ٣٧° هو مقدار

الزاوية المطلوبة

المثال الثانى ان يكون المعلوم لوجا س = ٩٫٩٧٩٠٣١٣

فحيث ان هذا اللوغاريتم اكبر من لوغاريتم جيب ٤٥° يبحث عنه

فى الصفوف التى توجد بها لوغاريتمات جيوب متممات الزوايا التى دون

٤٥° فيشاهد ان اللوغاريتم المعلوم محصور بين اللوغاريتمين الجدولين

المنسوبين الى لوجا ٢٠َ ٧٢° و لوجا ٢١َ ٧٢° وحيث ان الزاوية

الحادة المطلوبة مركبة من ٢٠َ ٧٢° وعدد من الثوانى رمزه رً يلزم

لتعيين الزاوية المذكورة ان يعين مقدار رً ولذا يؤخذ الفرق

٠٫٠٠٠٠٤٠٢ بين اللوغاريتمين الجدولين المتواليين اللذين يوجد بينهما اللوغاريتم المعلوم والفرق ٠٫٠٠٠٠١٢١ بين اللوغاريتم المعلوم واصغر اللوغاريتمين ثم توضع هذه المناسبة

٠٫٠٠٠٠٤٠٢ : ٠٫٠٠٠٠١٢١ :: ٦٠ً : رً ومنها يستخرج

رً = ١٨ وبناء على ذلك تكون الزاوية المطلوبة س = ٧٢ ٢٠ ١٨

(٤٢) الحالة الثانية ان يكون المعلوم لوغاريتم ظل زاوية والمراد تعيين هذه الزاوية ولنوضح ذلك بمثالين فنقول

المثال الاول ان يكون المعلوم لو ظا س = ٩٫٨٧٨٤٦٧٥

فحيث ان هذا اللوغاريتم اصغر من لوغاريتم ظل ٤٥ْ فالزاوية س تكون اصغر من ٤٥ْ وبناء على ذلك يبحث عن هذا اللوغاريتم فى الصفوف الرأسية التى توجد بها لوغاريتمات الظلال فيشاهد ان اللوغاريتم المعلوم محصور بين اللوغاريتمين الجدولين ٩٫٨٧٨٤٢٨١ و ٩٫٨٧٨٦٩٠٧ المنسوبين الى ظا ٥َ ٢٧ْ و ظا ٦َ ٣٧ْ وحيث ان الزاوية س مركبة من ٥َ ٣٧ْ و رً من الثوانى ويلزم لتعيين هذه الزاوية ان يبين مقدار رً فيقال

٠٫٠٠٠٠٢٦٢٦ : ٠٫٠٠٠٠٣٩٤ :: ٦٠ً : رً ومنها يستخرج

رً = ٩ً وبناء على ذلك تكون الزاوية س = ٩ً ٥َ ٣٧ْ

المثال الثانى ان يكون المعلوم لو ظا س = ١٠٫١٧٤١٥٠٥

فحيث ان هذا اللوغاريتم اكبر من لوغاريتم ظل ٤٥ْ يلزم ان يبحث عنه

فى

في الصفوف التي توجد بها اظلال متممات الزوايا التي دون ٤٥° فيشاهد انه محصور بين اللوغارتمين ١٠٫١٧٤٠١٤٠ و ١٠٫١٧٤٢٨٧٣ المنسوبين الى لوظا ١١َ ٥٦° ولوظا ١٢َ ٥٦° ولاجل تعيين مقدار رً الذي يلزم اضافته الى ١١َ ٥٦° لتتكون من ذلك الزاوية المطلوبة يؤخذ الفرق ٠٫٠٠٠٢٧٣٣ بين لوظا ١١َ ٥٦° ولوظا ١٢َ ٥٦° وتوضع هذه المتناسبة

٠٫٠٠٠٢٧٣٣ : ٠٫٠٠٠١٣٦٥ :: ٦٠ً : رً

ومنها يستخرج رً = ٣ً وبناء على ذلك يكون مقدار الزاوية س هو ٣٠ً ١١َ ٥٦° تقريبا

(٤٣) الحالة الثالثة ان يكون المعلوم جيب المتمم او ظل المتمم لزاوية حادة س والمطلوب تعيين هذه الزاوية ولذلك طريقتان

الاولى ان يقال من المعلوم ان هذه الحالة ترجع الى احدى الحالتين السابقتين لان جيب المتمم لزاوية حادة س وظله مساويان بالتوالي لجيب متممها ٩٠ ــ س وظله فاذا رمز لهذا المتمم بالرمز ص حدث لوجتا س = لوجا ص و لوظتا س = لوظا ص و ص = ٩٠ ــ س ثم يعين لوجا ص و لوظا ص ومقدار الزاوية ص كما تقرر في الحالتين السابقتين ثم يطرح هذا المقدار من ٩٠° فيكون الباقي هو الزاوية المطلوبة

فاذا علم لوجتا س = ٩٫٤٧٥٣٢٧١ مثلا لزم ان يفرض ان ص = ٩٠ ــ س ومنها يستخرج س = ٩٠ ــ ص و لوجتا س = لوجا ص = ٩٫٤٧٥٣٢٧١ وحيث ان لوجا ص = ٩٫٤٧٥٣٢٧١ موجود في الجدول يكون ص = ٢٣َ ١٧° ويطرح ١٧° ٢٣َ من ٩٠° يكون الباقي ٣٧َ ٧٢° وهو مقدار الزاوية س

(٤٤) الطريقة الثانية ان يقال اذا اريد تعيين الزاوية المذكورة بدون استعمال المتمم يلاحظ اولا انه اذا ازدادت الزاوية الحادة تناقص جيب متممها وظل متممها الان لوجتا ٠ = ١٠ ولوجتا ٤٥° = ٩٫٨٤٩٤٨٥٠

ولوظتا ٠ = ∞ ولوظتا ٤٥° = ١٠ ولوظتا ٥٩′ ٨٩° = ٦٫٤٦٣٧٢٦١ فحينئذ اذا كان مقدار لوجا س محصورا بين ١٠ و ٩٫٨٤٩٤٨٥٠ فالزاوية س تكون محصورة بين ٠° و ٤٥° واذا كان لوجتا س محصورا بين ٩٫٨٤٩٤٨٥٠ و ٦٫٤٦٣٧٢٦١ كانت الزاوية س محصورة بين ٤٥° و ٥٩′ ٨٩° ومتى كان لوظتا س اكبر من ١٠ كانت الزاوية اصغر من ٤٥° ومتى كان لوظتا س محصورا بين ١٠ و ٦٫٤٦٣٧٢٦١ كانت الزاوية محصورة بين ٥٩′ ٨٩° و ٤٥° ولتوضيح ذلك بامثلة فنقول

المثال الاول ان يكون المعلوم لوجتا س = ٩٫٩٧٨٩٣٨٦ فيقال حيث ان اللوغاريتم ٩٫٩٧٨٩٣٨٦ المنسوب لجيب متمم س اكبر من اللوغاريتم ٩٫٨٤٩٤٨٥٠ المنسوب لجيب متمم ٤٥° تكون الزاوية المطلوبة اصغر من ٤٥° وحينئذ يبحث عن اللوغاريتم ٩٫٩٧٨٩٣٨٦ في الصفوف الرأسية المشتملة على لوغاريتمات جيوب المتممات فيشاهد أن هذا اللوغاريتم موجود في ثالث الصفوف الرأسية وان العدد ٤٢′ يوجد في الصف المعنون بلفظة دقائق وهو موجود مع اللوغاريتم المعلوم في خط افقي فاذا اضيف اليه ١٧° الموضوعة في رأس الصحيفة كان الناتج هو الزاوية المطلوبة وحينئذ تكون س = ٤٢′ ١٧°

المثال

المثال الثانى ان يكون المعلوم لوجتا س = ٩ر٤٧٥٣٢٧١ فيقال حيث ان اللوغاريتم ٩ر٧٨٠٣٢٥١ لجيب متمم س اصغر من اللوغاريتم ٩ر٨٤٩٤٨٥٠١ لجيب متمم ٤٥° تكون الزاوية المطلوبة اكبر من ٤٥° وحينئذ يبحث عن اللوغاريتم ٩ر٤٧٥٣٢٧١ فى الصفوف الرأسية التى توجد بها جيوب المتممات وبعد تعيينه تؤخذ الدقائق الموجودة فى الصف الاول من جهة الشمال وهى الموضوعة معه فى صف افقى ثم تؤخذ الدرج من اسفل الصحيفة فتكون الزاوية المطلوبة هى ٣٧′ ٧٢° اى ان س = ٣٧′ ٧٢°

المثال الثالث ان يكون المعلوم لوجتا س = ٩ر٧٨٠٣٢٥١ فيقال حيث ان اللوغاريتم ٩ر٧٨٠٣٢٥١ اصغر من اللوغاريتم ٩ر٨٤٩٤٨٥٠ لجيب ٤٥° يبحث عن هذا اللوغاريتم فى الصفوف الرأسية التى يوجد بها لوغاريتمات جيوب المتممات فيشاهد ان هذا اللوغاريتم محصور بين اللوغاريتمين الجدولين المتواليين ٩ر٧٨٠٣٠٠٠ و ٩ر٧٨٠٤٦٧١ المنسوبين الى جتا ٥٥′ ٥٢° وجتا ٥٤′ ٥٢° فالزاوية تكون محصورة بين ٥٥′ ٥٢° و ٥٤′ ٥٢° فحينئذ يلزم لتعيين المقدار الذى تنقص به الزاوية المطلوبة عن زاوية ٥٥′ ٥٢° ان تركب المتناسبة المقررة فى الاحوال السابقة فيكون مقدار الحد الرابع منها هو المقدار الذى تنقص به الزاوية المطلوبة عن زاوية ٥٥′ ٥٢° فحينئذ يكون س = ٥١″ ٥٤′ ٥٢°

المثال الرابع ان يفرض لوظتا س = ٩ر٨٧٨٤٦٧٥ فيكون س = ٥١″ ٥٤′ ٥٢°

المثال الخامس ان يفرض لوظنا سـ = ١٠،٤٩٧٠٢١٩ فيكون

سـ = ١٧ ٣٩ ٤٢

واما الجزء الثالث فانه لا يختلف فى التركيب عن الاول الا بكون الصفوف الاربعة المتوسطة معنونة بلفظتى جيب اعشارى وظل اعشارى وهو فى الاستعمال كالجزء الثانى غير أن منطوق المسائل يختلف فيه عن منطوق المسائل فى الثانى بزيادة لفظة لوغاريتم فقط وهو نادر الاستعمال لكونه لا يدخل الا فى القوانين غير اللوغاريتمية والعمليات التى ليست تامة الضبط

(فى تطبيق حساب المثلثات على بعض مسائل عملية)

(٤٥) عمليات حساب المثلثات تحتاج الى شيئين احدهما تعيين اتجاه البعد بين نقطتين وقياسه والثانى قياس الزاوية الواقعة بين مستقيمين واصلين من نقطة واحدة الى نقطتين معينتين

(فى الشواخص والجنزير المترى وغيره)

(٤٦) تستعمل فى تعيين اتجاه المستقيم المار بنقطتين معينتين على الارض قطع من الخشب اطرافها منتهية بقطع من الحديد كالرماح تسمى بالشواخص مثال ذلك ان يراد تعيين اتجاه المستقيم المار بالنقطتين ا و ب كما فى (شكل ١١) فيغرس بهاتين النقطتين شاخصان وعلى استقامتهما تغرس شواخص اخرى كالشواخص حـ و د و هـ بحيث تكون هذه الشواخص موجودة فى المستوى الرأسى المار بالشاخصين ا و ب

ويستعمل عادة فى قياس البعد بين نقطتين الجنزير المترى كما فى (شكل ١٢) الذى طوله عشرة امتار وكل متر من هذا المقياس يحتوى على خمس انابيب مرتبطة معا بحلقات الخامسة منها من النحاس وفى القياس بالجنزير تستعمل عشرة مسامير لها فائدتان احداهما تحديد طرحه والثانية البحث عن

الخطا

انلطا فى عدد الطرحات وقد يستعوض هذا الجنزير بقطعة من الخشب طولها خمسة امتار فيما اذا اريد قياس الابعاد الصغيرة او الاماكن القليلة الامتداد

ومما ينبغى ملاحظته هنا ان قياس القواعد من اهم الامور فى عمليات حساب المثلثات وحيث انه لا يمكن قياسها بالضبط التام تكرر العملية مرارا ثم تجمع النواتج المتحصلة من ذلك ويقسم حاصل جمعها على عدد المرات فيتحصل للقاعدة المعينة مقدار متوسط مضبوط بقدر الامكان

(فى الالات المستعملة فى قياس الزوايا)

(٤٧) الآلات الاصلية المستعملة فى قياس الزوايا الجرافومتر والبوصلة ودائرة التكرار والتيودوليت والسجستان ودائرة الانعكاس وقد اعرضنا عن ذكر هذه الآلات هنا ماعدا الجرافومتر لما فى شرحها من التطويل الذى لا يحتمله هذا المختصر

(فى الجرافومتر)

(٤٨) الجرافومتر من حيث هو يتركب من دائرة او نصف دائرة من النحاس ا ب ح كما فى (شكل ١٣) منقسمة الى ١٨٠° والى انصاف درجات ومن عضادتين ا ب و ح ى فاما العضادة ا ب فهى متحدة بالدائرة اتحادا كليا بحيث لا يتكون منهما معا غير جسم واحد واما العضادة ح ى فلا تتحد بالدائرة المذكورة الا فى المركز اتحادا به يتيسر دورانها حوله ونهايتها ح تمر بجميع نقط تقاسيم الدائرة ويوجد فى النهايات الاربع ا و ب و ح و ى للعضادتين الثابتة والمتحركة اربع شظيات صغيرة ع و ك و عَ و كَ عمودية على دائرة الآلة منقوبة ثقوبا مستطيلة وبها شقوق رفيعة اتجاهها يقسم الفتحات المستطيلة المقابلة لها الى اجزاء

متساوية وفى منتصف كل ثقب مستطيل شعرة هى عبارة عن امتداد كل شق رأسى ويوجد بالعضادة المتحركة ورنية ـ بواسطتها يعين مقدار الزوايا مقربا من ثانية والآلة المذكورة مثبتة على مسند ى ى ى ذى ارجل ثلاث بواسطة علبة ه ودائرة الآلة قابلة للتحرك حول مركزها بواسطة فك البرمة ل اوربطها

فاذا اريد استعمال هذه الآلة فى قياس الزاوية الحادثة من المستقيمين الواصلين من النقطتين م و هـ المعينتين الى نقطة الوضع ض تثبت هذه الآلة بحيث يكون مركزها و فى رأسى واحد مع نقطة الوضع المذكورة ولاخذ الزاوية المذكورة يمر مستوى دائرة الآلة بمستوى النقط الثلاث ض و م و هـ ثم يضع الراصد عينه على احد الشقوق ح من العضادة الثابتة وتحرك دائرة الآلة الى ان يمر الشعاع النظرى ح ك بالنقطة م ثم تربط البرمة ل لتثبت الآلة فى هذا الوضع ثم تحرك العضادة الاخرى ى ى الى ان تستتر النقطة هـ بشعرة الشظية ك فيكون القوس المحصور بين صفر الآلة وصفر الورنية المثبتة بالعضادة ى ى هو قياس الزاوية هـ و م المطلوبة وهذا الجرافومتر ذو الشظيات هو الذى يستعمل فى الاعمال القليلة الامتداد واما الجرافومتر ذو النظارات فيستعمل فى الاعمال المضبوطة التى تكون فيها النقط المرصودة على ابعاد عظيمة من بعضها كما فى (شكل ١٤) وهذا الجرافومتر فى الاستعمال كالجرافومتر ذى الشظيات

(فى بعض امثلة حسابية)

(٤٩) المثال الاول ان يكون المطلوب تعيين ارتفاع بناء يمكن الوصول الى اصله بارض افقية تقريبا كالبناء حـ م ى الذى ارتفاعه المطلوب هو حـ ـ كما فى (الشكل ١٥) فنوضع الآلة فى النقطة هـ مثلا على بعد من اصل هذا البناء ثم يمر شعاع نظرى افقى ح على احد اركانه الرأسية وشعاع آخر على النقطة حـ المقابلة للركن المذكور فى اعلى البناء ولذا تجعل

دائرة

دائرة الآلة رأسية بان يستعمل لذلك شاقول يكون خيطه منطبقا على مستوى الآلة ثم تجعل العضادة الثابتة افقية ويعرف ذلك بكون خيط الشاقول مقابلا للدرجة ٩٠ من محيط الآلة الرأسى الوضع ثم تجعل العضادة المتحركة فى الوضع ءح وتقرء الزاوية حءح ثم يقاس بالجنزير البعد هـ ب المساوى للضلع ءح من المثلث القائم الزاوية ءحح الذى لا يعلم منه حينئذ غير الزاوية حءح و ءح الذى هو احد ضلعى الزاوية القائمة فاذن يمكن حساب الضلع حح الذى هو ارتفاع رأس البناء عن المستوى الافقى المار بمركز الجرافومتر بواسطة القانون

حح = ءح ظا حءح

وحيث ان حساب هذا القانون لا يجرى الا بواسطة اللوغاريتم فيرد نصف القطر فيه الى اصله يحدث

$$\text{حح} = \text{ءح} \; \frac{\text{ظا حءح}}{\text{نق}}$$

ومن هنا يؤخذ

لو حح = لو ءح + لو ظا حءح ـ لو نق

وحيث ان نق يعتبر هنا مساويا لنصف قطر الجداول اى ان نق = ١٠^١٠ يكون لو نق = ١٠ فاذا كان الضلع ءح = ١٣ مترا مثلا وكانت الزاوية المرصودة حءح = ٤٣° ١٧َ حدث

لو ١٣ = ١٫١١٣٩٤٣٣ و

لو ظا ١٧َ ٤٣° = ٩٫٩٧٣٩٦٠٢

حاصل الجمع ـ ١٠ = ١٫٠٨٧٩٠٣٥ = لو حح

فيكون الارتفاع حح = ١٢٫٢٤ مترا

فاذا كان لا يمكن الوصول الى اصل البناء كما فى (الشكل ١٦) فلا يلزم فى هذه الحالة الا تعيين مستقيم على الارض كالمستقيم ب اك يكون مارا

بمركز البناء المذكور ثم توضع الآلة فى النقطتين ا و ب من هذا المستقيم ويقاس البعد اب وتعين الزاويتان بحد و بحى وباخذ الزاوية دحى التى هى مكمل الزاوية بحد المقيسة يعلم من المثلث دحى ضلع والزاويتان المجاورتان له وبواسطة المناسبة

جادىح : جاحدى :: حد : حى

يسهل تحصيل احد الضلعين الآخرين وهو دح وحيث علم فى المثلث القائم الزاوية دحب الزاوية بحد والوتر حد فالضلع دب الذى هو ارتفاع البناء فوق مركز الآلة يتحصل بواسطة المعادلة

$$دب = \frac{دح \times جا دحب}{نق}$$

وبذلك تحل المسئلة ويتحصل المطلوب

ولنوضح ذلك بمثال رقمى فنقول

ليكن الضلع حى = ١٤٫٧٦٢ مترا والزاوية دحب = ٢٩ ٤

والزاوية دىح = ١٧ ٣٣ فباخذ مكمل الزاوية بحد

يشاهد أن دحى = ٣٦ ٤٨ فاذن تكون الزاوية حدى = ١٢ ٨

حساب الضلع دح

لو حى = ١٫١٦٩١٤٥٢

لو جا دىح = ٩٫٧٣٩٣٩٨٠

لو جا حدى = ٠٫٨٤٥٧٦٢٤

لو دح = ١٫٧٥٤٣٠٥٦

دح = ٥٦٫٧٩٤ مترا

بحسابه

حساب الارتفاع حـ

لو ح ع = ١٫٧٥٤٣٠٥٦

لو ح ـ = ٩٫٨٢١١٢١٧

لو حـ = ١٫٥٧٥٤٢٧٣

حـ = ٣٧٫٦٢٠ مترا وهو الارتفاع المطلوب

ومن المعلوم ان المجموع الاول قد حذف منه عشرة فى مقابلة العشرة التى اخذ منها المكمل وان المجموع الثانى قد حذف منه عشرة ايضا فى مقابلة لو نق وهذا امر لا حاجة الى التنبيه عليه فى الامثلة الآتية

(تنبيه)

اذا اريد فى المسئلتين المذكورتين تحصيل الارتفاع الحقيقى للبناء المذكور ينبغى اعتبار ارتفاع الجرافومتر وضمه الى الارتفاع المحسوب ولنمثل لذلك بامثلة فنقول

(٥٠) المثال الثانى ان يكون المطلوب قياس ارتفاع جبل فانه يبدء على الارض بقياس قاعدة كالقاعدة ح ء كما فى (شكل ١٧) ويقاس طولها ثم تؤخذ الزاويتان حـ ح ء و حـ ء ح الكائنتان فى نهايتى هذه القاعدة فيعلم من المثلث حـ ح ء زاويتان والضلع المجاور لهما فاذن يمكن حساب حـ ح الذى هو أحد الضلعين الآخرين ثم تؤخذ ايضا فى النقطة ح الزاوية حـ ح ظ الحادثة من المستقيم الرأسى ح ظ مع نصف القطر الشعاعى حـ ح ويؤخذ مكملها وحينئذ يعلم من المثلث القائم الزاوية حـ ح ا الوتر حـ ح واحدى الزاويتين الحادثين حـ ح ا ثم يحسب الضلع حـ ا اى ارتفاع رأس الجبل حـ فوق مستوى الآلة بواسطة المعادلة

حـ ا = (حـ ح جا حـ ح ا) / نق وبذلك تحل المسئلة ويتحصل المطلوب

(٥١) المثال الثالث ان يكون المعلوم من مثلث اضلاعه الثلاثة حـَ = ٨٤٩٫٥٣٨ و ـَ = ٧١٥٫٤٧ و ءَ = ٦٢٨٫٤٣٦

والمطلوب تعين زواياه الثلاث ح و ب و ى فيحصل فى مبدء الامر

٢ ل = ٢١٩٣٫٤٤٤ و ل = ١٠٩٦٫٧٢٢

و ل ـ ح = ٢٤٧٫١٨٤ و ل ـ ى = ٤٦٨٫٢٨٦

و ل ـ ب = ٣٨١٫٢٥٢ ومن هنا يحدث

لو ل = ٣٫٠٤٠٠٩٦٥ لوَ ل = ٦٫٩٥٩٩٠٣٥

لو (ل ـ ح) = ٢٫٣٩٣٠٢٠٤ لوَ (ل ـ ح) = ٧٫٦٠٦٩٧٩٦

لو (ل ـ ب) = ٢٫٥٨١٢١٢١ لوَ (ل ـ ب) = ٧٫٤١٨٧٨٧٩

لو (ل ـ ى) = ٢٫٦٧٠٠١١٢ لوَ (ل ـ ى) = ٧٫٣٢٩٤٨٨٨

حساب الزاوية ح بواسطة القانون ظا ½ ح = نق $\sqrt{\frac{(ل-ب)(ل-ى)}{ل(ل-ح)}}$ هو

لو (ل ـ ب)	= ٢٫٥٨١٢١٢١
لو (ل ـ ى)	= ٢٫٦٧٠٠١١٢
لوَ ل	= ٦٫٩٥٩٩٠٣٥
لو (ل ـ ح)	= ٧٫٦٠٦٩٧٩٦
حاصل الجمع	١٩٫٨١٨٦٠٦٤
لو ظا ½ ح	= ٩٫٩٠٩٣٠٣٢

½ ح = ٣٩° ٣′ ٣٧″

فيكون ح = ٧٨° ٧′ ١٤″

حساب الزاوية ب بواسطة القانون ظا ½ ب = نق $\sqrt{\frac{(ل-ح)(ل-ى)}{ل(ل-ب)}}$

هو

لو (ك ـ ح) = ٢٫٣٩٣٠٢٠٤

لو (ك ـ ى) = ٢٫٦٧٠٠١١٢

لوَ ك = ٦٫٩٠٩٩٠٣٥

لوَ (ك ـ ب) = ٩٫٤١٨٧٨٧٩

حاصل الجمع = ١٩٫٤٤٢٢٢٢٠

لو ظا ½ ب = ٩٫٧٢١١١١٠

½ ب = ٢٧ ٤٥ ٤٫٣

فيكون ب = ٥٥ ٣٠ ٨٫٦

حساب الزاوية ى بواسطة القانون ظا ½ ى = نق √((ك ـ ح)(ك ـ ب) / ك(ك ـ ى))

هو

لو (ك ـ ح) = ٢٫٣٩٣٠٢٠٤

لو (ك ـ ب) = ٢٫٥٨١٢١٢١

لوَ ك = ٦٫٩٠٩٩٠٣٥

لو (ك ـ ى) = ٧٫٣٢٩٤٨٨٨

حاصل الجمع = ١٩٫٢٦٣٦٢٤٨

لو ظا ½ ى = ٩٫٦٣١٨١٢٤

½ ى = ٢٣ ١١ ١٨٫ ٧

فيكون ى = ٤٦ ٢٢ ٣٧٫ ١٤

تحقيق

ح	= ١٤ ٧ ٧٨
و ب	= ٨٫٦ ٣٠ ٥٥
و ى	= ٢٧٫٤ ٢٢ ٤٦
حاصل الجمع	١٨٠

(٥٢) المثال الرابع ان يكون المعلوم الضلعين ح و ب والزاوية ح المقابلة لاحدهما والمطلوب تعيين الزاويتين ب و ى والضلع ى بفرض ان الضلع ح = ٥٤٦٧٫٤٨ والضلع ب = ٥٧٨٤٫٥٩ والزاوية ح = ٤٢ ١٨ ٦٦

حساب الزاوية ب بواسطة القانون جا ب = ب جا ح / ح هو

لو ٥٧٨٤٫٥٩	= ٣٫٧٦٢٢٢٧٢٦
لو جا ٤٢ ١٨ ٦٦	= ٩٫٩٦١٧٧٤٣
لوَ ٥٤٦٧٫٤٨	= ٦٫٢٦٢٢١٢٨
حاصل الجمع	= ١٩٫٩٨٦٢٥٩٧
لو جا ب	= ٩٫٩٨٦٢٥٩٧

فتكون الزاوية المقابلة ب = ٤٧٫٤ ٣٩ ٧٥ و بَ = ١٢٫٦ ٢٠ ١٠٤ وهذان المقداران موافقان لكون ح > ٩٠ و ح > ب

الحل الاول ان يفرض ب = ٤٧٫٤ ٣٩ ٧٥

حساب الزاوية ى هو

ى = ١٨٠ − (ح + ب)

ح = ٤٢ ١٨ ٦٦

ب = ٤٧،٤ ٣٩ ٧٥

ب + ح = ٢٩،٤ ٥٨ ١٤١

ى = ٣٠،٦ ١ ٣٨

حساب الضلع ىَ بواسطة القانون ىَ = (حَ جا ى)/(جا ح) هو

لو ٥٤٦٧،٤٨ = ٣،٧٣٧٧٨٧٢

لو جا ٣٠،٦ ١ ٣٨ = ٩،٧٨٩٥٨٤٨

لو جا ٤٢ ١٨ ٦٦ = ٠،٠٣٨٢٢٥٧

حاصل الجمع = ١٣،٥٦٥٥٩٧٧

لو ىَ = ٣،٥٦٥٥٩٧٧

فيكون ىَ = ٣٦٧٧،٨٨

الحل الثاني ان يفرض ب = ١٢،٦ ٢٠ ١٠٤

حساب الزاوية ى هو

ى = ١٨٠ − (ب + ح)

ح = ٤٢ ١٨ ٦٦

ب = ١٢،٦ ٢٠ ١٠٤

ب + ح = ٥٤،٦ ٣٨ ١٧٠

ى = ٥،٤ ٢١ ٩

حساب الضلع دَ بواسطة القانون دَ = $\frac{حَ جا كَ}{جا حَ}$ هو

لو	٥٤٦٧٫٤٨	= ٣٫٧٣٧٧٨٧٢
لو جا	٤٥ ٢١ ٩	= ٩٫٧١٠٨٢٨٨
لوَ جا	٤٢ ١٨ ٦٦	= ٠٫٠٣٨٢٢٥٧
حاصل الجمع		= ١٢٫٩٨٦٨٤١٧
لو	دَ	= ٢٫٩٨٦٨٤١٧
فيكون	دَ	= ٩٧٠٠٥

(٥٣) المثال الخامس ان يكون المطلوب تعيين بعد نقطة مفروضة كالنقطة ب عن نقطة اخرى لا يمكن الوصول اليها كالنقطة ح كما فى (شكل ١٨) فتقاس على الارض قاعدة حيثما اتفق كالقاعدة ب د والزاويتان ح د ب و ح ب د فتعلم الزاوية ب ح د وهى الثالثة من زوايا المثلث ح ب د وحينئذ يتحصل البعد المطلوب ح ب بواسطة المناسبة

ح ب : ب د :: جا ح د ب : جا ب ح د فاذا فرض ان

ب د = ٢٠٧٫١١ امتار و ح د ب = ٢٤ ٢٧ ٨٥

و ح ب د = ٥٠ ١٩ ٥٣ كان ب ح د = ٤٦ ١٢ ٤١

حساب البعد ح ب هو

لو	٢٠٧٫١١	= ٢٫٣١٦٢٠١١
لو جا	٢٤ ٢٧ ٨٥	= ٩٫٩٩٨٦٢٢٢
لوَ جا	٤٦ ١٢ ٤١	= ٠٫١٨١٢٠٨٧
حاصل الجمع		= ١٢٫٤٩٦٠٤٣٠
لو	ح ب	= ٢٫٤٩٦٠٤٣٠

فيكون البعد ح ب = ٣١٣٫٣٦ مترا

(٥٤) المثال السادس ان يكون المطلوب تعيين البعد بين نقطتين ح و ب لا يمكن الوصول اليهما غير انهما مشاهدتان فتقاس على الارض القاعدة ع ك كما في (شكل ١٩) والزوايا بكع و حكب و بعك و حعك و حكع فيعلم من كل من المثلثين بكع و حكع ضلع وزاويتان وحينئذ يمكن تعيين مقداري المستقيمين كب و كح والزاوية حكب المقيسة الواقعة بينهما وبحل هذا المثلث الاخير يتحصل البعد حب المطلوب ولذا يجعل

بك = حَ و كح = بَ والزاوية حكب = ك ومن المناسبة

$$\text{حَ} + \text{بَ} : \text{حَ} - \text{بَ} :: \text{ظا}\ \tfrac{1}{2}(\text{ح} + \text{ب}) : \text{ظا}\ \tfrac{1}{2}(\text{ح} - \text{ب})$$

يؤخذ مقدار $\tfrac{1}{2}(\text{ح} - \text{ب})$ وحينئذ يعلم مقدار الزاويتين ح و ب

غير ان هذا الحل يتوقف على البحث عن مقداري الضلعين حَ و بَ مع انه يمكن ايجاد مقداري الزاويتين المذكورتين ح و ب بطريقة سهلة لا تتوقف الا على معرفة لوغارتمات الضلعين حَ و بَ المذكورين وهي ان تعين الزاوية المساعدة هـ على وجه به يكون

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{بَ}}{\text{حَ}}$$ وبمقتضى ما تقدم يؤخذ

$$\text{ظا}\ (٤٥ - \text{هـ}) = \frac{\text{ظا}\ ٤٥^\circ - \text{ظا هـ}}{١ + \text{ظا}\ ٤٥^\circ\ \text{ظا هـ}}$$

وحيث ان $\text{ظا}\ ٤٥^\circ = ١$ يحدث

$$\text{ظا}\ (٤٥^\circ - \text{هـ}) = \frac{١ - \text{ظا هـ}}{١ + \text{ظا هـ}}$$

وبابدال ظا هـ بمقدارها $\frac{\text{بَ}}{\text{حَ}}$ يحدث

$$\text{ظا}\ (٤٥ - \text{هـ}) = \frac{\text{حَ} - \text{بَ}}{\text{حَ} + \text{بَ}}$$

وحيث انه يتحصل من المناسبة

$$\text{ح} + \text{ت} : \text{ح} - \text{ت} :: \text{ظا} \tfrac{1}{2} (\text{ح} + \text{ب}) : \text{ظا} \tfrac{1}{2} (\text{ح} - \text{ب})$$

$$\text{او ظا} \tfrac{1}{2} (\text{ح} - \text{ب}) = \frac{\text{ح} - \text{ت}}{\text{ح} + \text{ت}} \text{ظا} \tfrac{1}{2} (\text{ح} + \text{ب})$$

فاذا ابدلت فى هذه المعادلة الكمية $\frac{\text{ح} - \text{ت}}{\text{ح} + \text{ت}}$ بمقدارها ظا (٤٥ − هـ)

$$\text{تحصل ظا} \tfrac{1}{2} (\text{ح} - \text{ب}) = \text{ظا} (٤٥^\circ - \text{هـ}) \text{ ظا} \tfrac{1}{2} (\text{ح} + \text{ب})$$

وحيث ان الزاوية هـ معلومة وكذا $\tfrac{1}{2}$ (ح + ب) يتحصل بالسهولة من هذه المعادلة مقدار $\tfrac{1}{2}$ (ح − ب) وحينئذ يعلم مقدار الزاويتين ح و ب المجهولتين من المثلث حبك والتعيين البعد المجهول حب توضع المناسبة

$$\text{حب} : \text{ت} :: \text{جاك} : \text{جاب} \quad \text{التى يؤخذ منها}$$

$$\text{لو حب} = \text{لو ت} + \text{لو جاك} + \text{لو جاب} - ١٠$$

ومن هنا يتحصل حب وهو البعد بين النقطتين اللتين لا يمكن الوصول اليهما

تم طبع الروضة السندسيه فى الحسابات المثلثيه بمطبعة مهندسخانة
الخديويه ببولاق مصر المحميه تحت نظارت من تلافى رتب
المجد وتداركه الامير على بيك مبارك فى اوائل صفر
الخير الذى هو من شهور سنة ١٢٧٠ من الهجرة
النبويه على صاحبها ازكى التحيه وصلى
الله على سيدنا محمد النبى الامى
وعلى آله وصحبه
وسلم